Campos de vectores completamente integrables en $\mathbb{R}^n$: algunos aspectos geométricos y topológicos.*

Daniel Peralta-Salas**

26 de diciembre de 2006

1. Elementos básicos de sistemas dinámicos [14].

Sea el siguiente sistemas de EDOs en $\mathbb{R}^n$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V(x)\,, \tag{1}$$

donde $t \in \mathbb{R}$ es el parámetro independiente, $x \in \mathbb{R}^n$ son las variables dependientes y $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación suave. Si este sistema de ecuaciones se complementa con una condición inicial $x(t=0) = x_0$ entonces existe una única solución $x(t; x_0)$. Si esta solución está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ decimos que V es completo con respecto a esa condición inicial, y si V es completo con respecto a cualquier condición inicial diremos simplemente que es completo.

La ecuación (1) se dice que define un flujo local $\phi(t; x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ suave o analítico que satisface:

- $\phi(t; \phi(s, x)) = \phi(t + s; x)$
- $\phi(0, x) = x$

En el caso en el que V sea completo $\phi(t; x)$ es un flujo uniparamétrico de difeomorfismos, en particular cualquier flujo local es conjugado (por reparametrización) a un flujo global. Para la condición inicial $x = x_0$ el flujo $\phi(t; x)$ define una única órbita en $\mathbb{R}^n$. La aplicación V puede verse como un campo de vectores, i.e. una sección de $T\mathbb{R}^n$, y es obvio que dicho campo es tangente a las órbitas que define $\phi(t; x)$. De aquí surge la idea del estudio cualitativo de las EDOs, o teoría de

*Notas redactadas para el minicurso impartido en el 1º Encuentro de jóvenes investigadores en Geometría, Mecánica y Control celebrado los días 19 y 20 de Diciembre de 2006 en el CSIC, Madrid.

**Dirección actual: Dpto. de Física Teórica II de la UCM. A partir del 1 de Febrero de 2007 en el Dpto. de Matemáticas de la UC3M. E-mail: dperalta@math.uc3m.es

sistemas dinámicos: entender la estructura geométrica y topológica de las trayectorias del campo de vectores V asociado al sistema dinámico. La comprensión de esta estructura indica propiedades de las soluciones.

Definamos algunos objetos relevantes para el estudio de campos de vectores.

Punto crítico: $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto crítico si $V(x_0) = 0$. La solución con condición inicial en un punto crítico no evoluciona, i.e. $x(t; x_0) = x_0$. Un punto crítico se dice que es hiperbólico si los autovalores de $DV(x_0)$ tienen parte real no nula.

Órbita periódica: es una trayectoria de V difeomorfa a $\mathbb{S}^1$. La solución con condición inicial algún punto x_0 de la órbita periódica verifica $x(t; x_0) = x(t + T; x_0)$ para cierto $T > 0$ denominado período de la solución.

Conjunto invariante: el conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es invariante bajo el flujo de V si $\phi(t; x) \subset S$ para todo $x \in S$ y $t \in \mathbb{R}$. El significado geométrico es que las líneas de V que pasan por algún punto de S nunca salen de S. Los conjuntos invariantes que separan regiones de $\mathbb{R}^n$ en las que V se comporta de forma distinta (con respecto a alguna propiedad) se llaman separatrices.

Integral primera: una función suave $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, constante en ningún abierto, es integral primera de V si $V(I) = 0$. Geométricamente esto implica que las hojas de nivel de I son conjuntos invariantes bajo V. Nótese por el contrario que no todo conjunto invariante procede de una integral primera.

Normalizador: un campo de vectores suave S es un normalizador de V si $[V, S] = \mu V$ para alguna función $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Localmente (globalmente si S es completo) el campo S transforma órbitas de V en otras órbitas de V (aunque la parametrización no se preserva), por lo que el flujo local inducido por S es una simetría continua de las soluciones de la ecuación (1). Si $\mu \equiv 0$ entonces a S se le denomina centralizador.

Los resultados que aparecen en las próximas secciones para los que no se cita ninguna referencia proceden de los artículos [7], [8] y [13].

2. Campos de vectores CI: definiciones, ejemplos y problemas.

Sea V un campo de vectores en $\mathbb{R}^n$, sin ceros, con $n-1$ integrales primeras $\Phi = (I_1, \ldots, I_{n-1}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ que son independientes en todo el espacio, i.e. $\mathrm{rank}(\mathrm{d}\Phi)(x) = n-1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, y por tanto $\mathrm{d}\Phi(x) : T_x\mathbb{R}^n \to T_{\Phi(x)}\mathbb{R}^{n-1}$ es una aplicación sobreyectiva. Las aplicaciones Φ que satisfacen esta condición se llaman sumersiones.

El conjunto de trayectorias de V define una foliación $\mathcal{S}$ suave 1-dimensional de $\mathbb{R}^n$. Tanto V como la foliación son CI porque tienen $n-1$ integrales primeras independientes, por tanto el conjunto de (componentes conexas) de las fibras $\Phi^{-1}(c)$ de la sumersión definen la misma foliación. Es fácil ver que existe una función suave $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que no se anula en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$V = \lambda[\star(\mathrm{d}I_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}I_{n-1})]^i ,$$

por tanto hablaremos indistintamente, en lo que sigue, de órbitas de V, hojas de $\mathcal{S}$ y fibras de Φ. Nótese que todas las órbitas son subvariedades de dimensión 1 propiamente embebidas en $\mathbb{R}^n$. Si $\lambda \equiv 1$ en la anterior ecuación entonces V tiene divergencia cero.

El ejemplo más sencillo de campo CI es cualquier V C^∞ conjugado a la foliación vertical dada por

$$V = \partial_{x_n} ,$$

en cuyo caso las integrales primeras son $I_1 = x_1, \ldots, I_{n-1} = x_{n-1}$. No debemos pensar que cualquier foliación CI es conjugada a la vertical, ya en $\mathbb{R}^2$ hay contraejemplos:

Ejemplo: El campo de vectores $V = \frac{1}{1+y^2}\partial_x - 2x\partial_y$ en $\mathbb{R}^2$ es CI (de hecho es Hamiltoniano) porque tiene como integral primera la sumersión $I_1 = x^2 + \arctan y$. Es fácil ver que V no es conjugado al campo vertical porque la sumersión I_1 no es localmente trivial.

La clave del ejemplo anterior es que la integral primera puede poseer valores críticos asintóticos en el infinito. Un caso particular en el que una función $I_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no tiene puntos críticos en el infinito es si $|\nabla I_1| \geq K > 0$, donde K es cierta constante, lo cual implica que I_1 define un fibrado trivial [5]. Si $n = 2, 3$ se puede probar que I_1 es conjugada a la función x_n, si $n > 3$ esto no es cierto, pudiendo realizarse como fibra la variedad de Whitehead. Lo mismo sucede si Φ define un fibrado localmente trivial cuya fibra es $\mathbb{R}$, el fibrado es globalmente trivial, el espacio de hojas es una variedad Hausdorff contractible, pero excepto cuando $n = 2, 3$ Φ no es conjugado a la foliación vertical [10].

Las órbitas de un campo CI también pueden ser periódicas. Existen ejemplos sencillos en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 4$ basados en la fibración de Hopf $\Phi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ [2]. En $\mathbb{R}^3$ no se conoce ningún ejemplo explícito, siendo este un importante problema abierto. Otros problemas que aparecen en la literatura de este tema son:

1. Probar que cualquier subvariedad de dimensión 1 propiamente embebida en $\mathbb{R}^n$ (no necesariamente conexa) es fibra de una sumersión.

2. Obtener criterios para garantizar la existencia de órbitas periódicas.

3. Dar condiciones para que la foliación no tenga hojas compactas o sea conjugada a la vertical.

4. Estudiar las propiedades diferenciables y topológicas de la separatriz, i.e. la región que separa fibras abiertas de fibras compactas.

5. Análisis de la función período asociada a la región de órbitas periódicas de V.

3. Campos de vectores CI: existencia de órbitas periódicas.

Hay pocos ejemplos de sumersiones Φ con fibras compactas, y ninguno en $\mathbb{R}^3$. En cualquier caso se puede probar que cualquier nudo es fibra de una sumersión suave o analitítica. La demostración usa una versión relativa del teorema de Phillips-Gromov [15, 6]:

Teorema de Phillips-Gromov: Si M es una variedad abierta entonces la aplicación diferencial

$$\mathrm{d} : Sub(M, N) \to Max(TM, TN)$$

es una equivalencia de homotopía débil. Recordemos que una aplicación $f : A \to B$ es una e.h.d. si induce una correspondencia 1-1 entre las componentes conexas por arcos de A y B e induce isomorfismos entre los grupos de homotopía de A y B.

Teorema: Cualquier subvariedad L propiamente embebida en $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$), de dimensión 1, posiblemente no conexa, es la preimagen $\Phi^{-1}(0)$ de alguna sumersión $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$. Si L es compacto y analítico entonces Φ puede tomarse analítica.

Esquema de la demostración:

1. Paso 1: Podemos reducirnos al caso $n = 3$ ya que para cualquier subvariedad de codimensión $n-1$ en $\mathbb{R}^n$ existe una difeotopía ambiente que la desplaza a un hiperplano de dimensión 3 si $n \geq 4$.

2. Paso 2: Cualquier campo de vectores definido sobre L, tangente a L, se puede extender a un campo de vectores en $\mathbb{R}^3$ sin ceros. Esto proporciona una extensión del haz normal de L.

3. Paso 3: Usando la teoría de Phillips-Gromov podemos deformar el haz normal para hacerlo holónomo, lo cual permite probar que existe una sumersión $\tilde{\Phi}$ tal que $L \subset \tilde{\Phi}^{-1}(0)$.

4. Paso 4: Eliminamos componentes extra introduciendo una trivialización privilegiada basada en la existencia de superficies de Seifert, así probamos que existe Φ tal que $L = \Phi^{-1}(0)$.

5. Paso 5: Para obtener una sumersión analítica aproximamos por sumersiones analíticas, aplicamos estabilidad y volvemos hacia atrás mediante una difeotopía analítica.

Este resultado se había demostrado parcialmente en $\mathbb{R}^3$, en el caso en el que L es compacto, por Watanabe [19] y Miyoshi [11].

Es fácil ver usando el teorema de Bendixon-Poincaré que la intersección de las hojas de nivel de $n-2$ integrales primeras $I_{i_1}, \ldots, I_{i_{n-2}}$ que contienen una órbita periódica no puede ser difeomorfa a $\mathbb{R}^2$. Algunos ejemplos en $\mathbb{R}^3$ son:

- $I_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + \arctan x_3$ tiene hojas de nivel difeomorfas a $\mathbb{R}^2$ y otras a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$.
- La sumersión analítica construida por Palmeira [12] tiene todas sus fibras difeomorfas a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$.

Nota: Cualquier hipersuperficie abierta (propiamente embebida) en $\mathbb{R}^n$ es fibra de alguna sumersión $I_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Cualquier sumersión $I_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es componente de una sumersión $\Phi = (I_1, \ldots, I_{n-1}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$.

Si llamamos B al espacio de hojas de la foliación $\mathcal{S}$ (una variedad no Hausdorff de dimensión $n-1$) y $U \subset B$ a la imagen de las fibras compactas entonces podemos probar la siguiente secuencia exacta, que generaliza la obtenida por Smith [17]:

$$\ldots \to H_i(M) \to H_i(B) \to H_{i-2}(U) \to H_{i-1}(M) \to \ldots ,$$

donde M es la variedad abierta donde está definida la sumersión. En el caso que nos interesa $M = \mathbb{R}^n$ y por tanto se sigue el siguiente corolario.

Corolario: Φ posee fibras compactas si y sólo si $\pi_2(B) \neq 0$. En $\mathbb{R}^3$, si las fibras de Φ son conexas entonces $\mathcal{S}$ es conjugada a la foliación vertical.

4. Campos de vectores CI: separatrices.

Si la sumersión Φ posee órbitas periódicas también debe poseer órbitas abiertas ($\mathbb{R}^n$ no se puede fibrar con círculos [1]), por tanto es natural estudiar la frontera de separación entre líneas $\mathbb{S}^1$ y líneas $\mathbb{R}$.

Definición: El conjunto $\mathcal{F} = \{P \in \mathbb{R}^n$: para cualquier vecindad $N(P)$ existen $Q, Q' \in N(P)$ tales que las órbitas de V que pasan por Q y Q' son difeomorfas a $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{R}$ respectivamente$\}$ se denomina separatriz o frontera topológica de Φ.

Una herramienta importante que usaremos para estudiar las separatrices son los normalizadores que se construyen de la siguiente manera:

$$S_i = \sum_{k=1}^{n-1} a_{ik} \nabla I_k ,$$

donde $a_{ik} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones que se obtienen de forma única, globalmente, a partir del sistema de ecuaciones

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_{ik} \nabla I_k \nabla I_j = \delta_{ij} \, .$$

Se puede probar que $[V, S_i] = \mu_i V$, donde $\mu_i = \operatorname{div} S_i - S_i(\ln |\lambda|)$.

Teorema: $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado, no acotado, no necesariamente conexo, invariante bajo V, de codimensión ≥ 1 y foliado por órbitas abiertas. Es el borde de la región abierta $E \subset \mathbb{R}^n$ rellena de órbitas periódicas, que si $n = 3$ es homeomorfa a $\mathbb{S}^1 \times N^2$, para alguna 2-variedad Hausdorff abierta N^2.

Nota: Como muestra el teorema anterior $\mathcal{F}$ tiene interior vacío si V es CI. Esta situación no es la típica, de hecho se pueden construir ejemplos de V analíticos con $k \leq n-2$ integrales primeras, tales que $\mathcal{F}$ tiene interior no vacío [3]. A este fenómeno se le conoce como caos geométrico.

En general $\mathcal{F}$ no es una subvariedad suave a trozos y puede tener una estructura bastante compleja. Si Φ es una sumersión polinómica entonces $\mathcal{F}$ es un conjunto semialgebraico [9], por lo que estructuras fractales y/o Cantorianas están prohibidas. En la clase analítica este no es el caso.

Teorema: Existen sumersiones $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ analíticas que poseen $\mathcal{F}$ fractal y/o Cantoriana. Arbitrariamente cerca (topología C^0 fuerte) de estas sumersiones hay otras con $\mathcal{F}$ regular, y al revés, cerca de una sumersión con separatriz regular hay otra con separatriz salvaje.

Esquema de la demostración:

1. Paso 1: Empiezo con una sumersión $\tilde{\Phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ con $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Extraigo a $\mathbb{R}^n$ un conjunto no compacto Σ que interseca la región de órbitas periódicas, y que es del tipo $\mathbb{R}^{m_1} \times W^{m_2} \times T_\infty$, $m_1 + m_2 \leq n-2$, donde W es una curva de Weierstrass (continua pero no diferenciable en todo punto).

2. Paso 2: El conjunto que se obtiene es analítico difeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Si asumo que Σ interseca cada órbita en un único punto entonces obtenemos una sumersión nueva Φ cuya separatriz tiene estructura fractal y/o Cantoriana.

3. Paso 3: El conjunto Σ se puede aproximar en la topología fuerte C^0 por conjuntos no patológicos que originan fronteras suaves a trozos.

Los campos V que no poseen órbitas periódicas se denominan completamente inestables. Nótese que si los normalizadores S_i son campos completos entonces se puede probar que $\mathcal{F} = \emptyset$, aunque en general $\mathcal{S}$ no es conjugado a la foliación vertical.

Ejemplo: Asumamos que las integrales primeras son ortogonales, i.e. $\nabla I_i \nabla I_j = 0$ si $i \neq j$, y que el módulo de su gradiente está acotado inferiormente, es decir $|\nabla I_i| \geq K > 0$. En este caso los normalizadores tienen la forma

$$S_i = \frac{\nabla I_i}{(\nabla I_i)^2}\,,$$

y son campos completos, concluyéndose que V es completamente inestable. Si $n \leq 3$ el campo V es conjugado a ∂_{x_n}, pero si $n \geq 4$ las hojas de alguna de las integrales primeras pueden ser homeomorfas a variedades tipo Whitehead, por lo que $\mathcal{S}$ no es conjugado a la foliación vertical.

5. Campos de vectores CI: función período.

Centrémonos en la región abierta E fibrada por órbitas periódicas. Definamos la función período como la función $T : E \to \mathbb{R}$ que asigna a cada punto el período (mínimo) de la trayectoria de V que pasa por dicho punto. Esta función tiene el mismo grado de suavidad que V. Como se ha probado anteriormente existen $n-1$ normalizadores S_i independientes y transversos a V.

Nota: Dados los campos de vectores $S_1, \ldots, S_{n-1}, V$ independientes que verifican $[V, S_i] = \mu_i V$ para algunas funciones μ_i, entonces V posee $n-1$ integrales primeras independientes en un entorno tubular de cualquier órbita periódica de V. Dichas integrales primeras se obtienen a partir de

$$\omega_i = (-1)^i \frac{i_V i_{S_1} \cdots i_{S_{i-1}} i_{S_{i+1}} \cdots i_{S_{n-1}} \Omega_n}{\mathrm{Det}(S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}, V)}\,,$$

como $\mathrm{d}I_i = \omega_i$.

La función período de un campo de vectores CI se puede poner en función de las $n-1$ integrales primeras, i.e. $T(I_1, \ldots, I_{n-1})$. Consideremos la órbita $\Phi^{-1}(c)$. Usando la ecuación variacional asociada a dicha órbita y su matriz de monodromía se puede obtener este resultado:

$$\frac{\partial T}{\partial I_i}(\Phi^{-1}(c)) = \int_0^{T(c)} \mu_i(\gamma(t))\mathrm{d}t\,.$$

Esta fórmula generaliza anteriores expresiones obtenidas por Freire, Gasull y Guillamon [4]. La aplicación más interesante de este resultado está relacionada con la caracterización de dominios isócronos, i.e. regiones abiertas donde la función período es constante.

Corolario: E es un dominio isócrono si y sólo si $\int_0^{T(c)} \mu_i(\gamma(t))\mathrm{d}t = 0$ para cualquier órbita periódica de V en E. Un caso particular de esto es que $S_1, \ldots, S_{n-1}$ sean centralizadores de V, de hecho se puede probar que cualquier entorno tubular isócrono de una órbita periódica de V admite $n-1$ centralizadores, generalizando así un resultado de Villarini [18].

Las derivadas de la función período también pueden obtenerse si se conocen $n-1$ campos independientes y transversos $X_1, \ldots, X_{n-1}$ en la región periódica. En este caso se puede calcular una combinación lineal adecuada de X_i para obtener normalizadores (el caso bidimensional fue obtenido por Sabatini [16]). Una aplicación de este resultado es que si V deja invariante cierta foliación $(n-1)$-dimensional transversa entonces el dominio es isócrono.

Ejemplo: Un ejemplo particularmente relevante en Mecánica es cuando V tiene divergencia cero. En este caso $\lambda = F(I_1, \ldots, I_{n-1})$. Si los normalizadores tienen divergencia nula también, usando la fórmula para la derivada de la función período, se deduce que

$$T(I_1, \ldots, I_{n-1}) = \frac{c}{F(I_1, \ldots, I_{n-1})} \, .$$

No todo campo de divergencia nula es CI (el caos Hamiltoniano es posible), pero si V posee un centralizador S de divergencia cero (e.g. una simetría Euclídea) entonces en una región periódica tubular alrededor de una trayectoria cerrada de V existen dos integrales primeras independientes:

$$\begin{aligned} \nabla I_1 &= V \wedge S \, , \\ \nabla I_2 &= \frac{(V \wedge S) \wedge V}{(V \wedge S)^2} \, . \end{aligned}$$

Obsérvese que $\nabla I_1 \nabla I_2 = 0$ y que $\lambda = -1$, por lo que

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \operatorname{div} \Big(\frac{V \wedge S}{(V \wedge S)^2} \Big) \, , \\ \mu_2 &= \operatorname{div} \Big(\frac{(V \wedge S) \wedge V}{V^2} \Big) \, . \end{aligned}$$

El dominio periódico es isócrono si, en particular, las funciones $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

6. Una generalización: embeddings CI

Si L es una variedad suave de dimensión k (compacta o no, conexa o no) y $h : L \to \mathbb{R}^n$ es un embedding propio de L en $\mathbb{R}^n$ con codimensión m, entonces decimos que h es CI si existe sumersión suave $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $h(L) \subset \Phi^{-1}(0)$. Si además $\Phi^{-1}(0) = h(L)$ entonces el embedding es FCI.

El caso de campos de vectores CI corresponde a $m = n-1$, donde se ha probado que cualquier embedding es FCI. El caso general es más complicado y requiere el uso de las siguientes herramientas: teoría relativa de Phillips-Gromov, teoría de homotopía, teoría de inmersiones de Smale-Hirsch y teoría de la obstrucción. Algunos de los resultados más relevantes que se pueden obtener son los siguientes:

1. Si una subvariedad es CI (o FCI) entonces sus fibrados normal y tangente son triviales.
2. Cualquier subvariedad de codimensión 1, sin componentes compactas, es FCI.
3. Cualquier subvariedad de codimensión 2 que sea CI es FCI.
4. Si $n \geq 2k+1$ entonces la subvariedad es CI.
5. Cualquier subvariedad con fibrado normal trivial y sin componentes compactas es CI.
6. Cualquier embedding de toros es CI.
7. Cualquier embedding de $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{S}^7$ es CI.
8. Cualquier embedding de una 3-variedad compacta en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 6$ es CI.

7. Una aplicación: ciclos límite analíticos.

Sea L un conjunto discreto (posiblemente infinito) de ciclos en $\mathbb{R}^3$, quizás anudados y entrelazados entre ellos. Asumamos que cada curva es subvariedad analítica. ¿Existe un campo de vectores analítico sin ceros, cuyos únicos conjuntos recurrentes son ciclos límite formados por los ciclos de L y tal que esos ciclos son hiperbólicos y asintóticamente estables?

Aplicando los resultados sobre sumersiones obtenemos que L es FCI y por tanto se puede expresar como

$$I_1(x,y,z) = 0\,,$$
$$I_2(x,y,z) = 0\,,$$

donde I_1, I_2 son funciones analíticas que forman una sumersión. Definamos el campo de vectores analítico

$$X = \nabla I_1 \wedge \nabla I_2 - \nabla(I_1^2 + I_2^2)\,.$$

Usando la función de Lyapunov $F = I_1^2 + I_2^2$ se deduce que X tiene como ciclos límite asintóticamente estables las curvas de L y que no tiene otros conjuntos recurrentes (en particular no se anula en $\mathbb{R}^3$). Finalmente se puede probar que estos ciclos son hiperbólicos, por tanto estructuralmente estables frente a perturbaciones pequeñas.

No sabemos si un resultado análogo es posible para campos de vectores polinómicos. Nótese que en $\mathbb{R}^2$ un campo de vectores polinómico sólo puede tener un número finito de ciclos límite (Ilyashenko y Écalle). En $\mathbb{R}^3$ hay ejemplos de campos polinómicos con infinitos ciclos límite no localmente finitos (Llibre y diversos colaboradores).

Referencias

[1] P.E. Conner, On the impossibility of fibring certain manifolds by a compact fibre. Michigan Math. J. **4**, 249-255 (1957).

[2] A.F. Costa, F. González-Gascón y A. González-López, On codimension one submersions of Euclidean spaces. Invent. Math. **93**, 545-555 (1988).

[3] A. Díaz-Cano, F. González-Gascón y D. Peralta-Salas, On scattering trajectories of dynamical systems. J. Math. Phys. **47**, 062703(1-10) (2006).

[4] E. Freire, A. Gasull y A. Guillamon, First derivative of the period function with applications. J. Differential Equations **204**, 139-162 (2004).

[5] F. González-Gascón y D. Peralta-Salas, On the construction of global coordinate systems in Euclidean spaces. Nonlinear Anal. **57**, 723-742 (2004).

[6] A. Haefliger, Lectures on the theorem of Gromov. Lecture Notes in Math. **209**, 128-141 (1971).

[7] G. Hector y D. Peralta-Salas, Completely integrable embeddings in Euclidean spaces. Preprint (2006).

[8] G. Hector y D. Peralta-Salas, Topological boundaries of completely integrable vector fields in $\mathbb{R}^n$. En preparación (2006-2007).

[9] Z. Jelonek, Geometry of real polynomial mappings. Math. Z. **239**, 321-333 (2002).

[10] L. Markus, Parallel dynamical systems. Topology **8**, 47-57 (1969).

[11] S. Miyoshi, Links and globally completely integrable vector fields on an open 3-manifold. Topology **34**, 383-387 (1995).

[12] C.F.B. Palmeira, Feuilletages par cylindres fermés de $\mathbb{R}^3$. C. R. Acad. Sci. Paris **290**, 419-421 (1980).

[13] D. Peralta-Salas, Period function and normalizers of vector fields in $\mathbb{R}^n$ with $n-1$ first integrals. Preprint (2006).

[14] L. Perko, Differential Equations and Dynamical Systems. Springer, New York, 2001.

[15] A. Phillips, Submersions of open manifolds. Topology **6**, 171-206 (1967).

[16] M. Sabatini, On the period function of planar systems with unknown normalizers. Proc. Amer. Math. Soc. **134**, 531-539 (2005).

[17] J.W. Smith, An exact sequence for submersions. Bull. Amer. Math. Soc. **74**, 233-236 (1968).

[18] M. Villarini, Regularity properties of the period function near a center of a planar vector field. Nonlinear Anal. **19**, 787-803 (1992).

[19] N. Watanabe, On knotted preimages of submersions. Topology **32**, 251-257 (1993).