DINÁMICA EN ALGEBROIDES DE LIE

1.- ALGEBROIDES DE LIE

Sea E un f.v. de rango n sobre una vdad M con $\dim M = m$

$\tau : E \longrightarrow M$ proyección del f.v.

$\Gamma(E) = \{ X : M \longrightarrow E \ / \ \tau \circ X = 1_M \}$ $\quad C^\infty(M)$-módulo

<u>DEF</u>.- Una <u>estructura de algebroide de Lie</u> sobre E consiste en

$[\![\cdot,\cdot]\!] : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ corchete de Lie (R-lineal, antisimétrico, ...)

$\rho : E \longrightarrow TM$ aplicación fibrada, denominada <u>aplicación ancla</u>

(denotamos $\rho : \Gamma(E) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ homomorfismo de $C^\infty(M)$-módulos)

t.q.

$$[\![X, fY]\!] = f[\![X,Y]\!] + \rho(X)(f)Y \quad , \quad \forall X,Y \in \Gamma(E),\ f \in C^\infty(M).$$

El triple $(E, [\![\ ]\!], \rho)$ se denomina <u>algebroide de Lie sobre M</u>.

<u>Consecuencia</u>: Si $(E, [\![\ ]\!], \rho)$ es un algebroide de Lie sobre M, entonces la aplicación ancla $\rho : \Gamma(E) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ es un homomorfismo entre las álgebras de Lie $(\Gamma(E), [\![\ ]\!])$ $\wedge$ $(\mathfrak{X}(M), [\ ])$.

<u>Nota</u>: Si $(E, [\![\ ]\!], \rho)$ es un algebroide de Lie, el corchete de Lie sobre $\Gamma(E)$ puede extenderse al denominado <u>corchete de Schouten</u> $[\![\ ]\!]$ sobre el espacio $\Gamma(\Lambda^\bullet E) = \bigoplus_k \Gamma(\Lambda^k E)$ de multi-secciones de E de tal forma que $(\Gamma(\Lambda^\bullet E), \wedge, [\![\ ]\!])$ sea un álgebra de Lie graduada. El corchete de Schouten satisface las siguientes propiedades:

i) $[\![P, Q]\!] \in \Gamma(\Lambda^{p+q-1} E)$

ii) $[\![X, f]\!] = \rho(X)(f)$

iii) $[\![P, Q]\!] = (-1)^{pq} [\![Q, P]\!]$

iv) $[\![P, Q \wedge R]\!] = [\![P, Q]\!] \wedge R + (-1)^{q(p+1)} Q \wedge [\![P, R]\!]$

v) $(-1)^{pr} [\![[\![P, Q]\!], R]\!] + (-1)^{qr} [\![[\![R, P]\!], Q]\!] + (-1)^{pq} [\![[\![Q, R]\!], P]\!] = 0$

$X \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$, $P \in \Gamma(\Lambda^p E)$, $Q \in \Gamma(\Lambda^q E)$, $R \in \Gamma(\Lambda^r E)$.

<u>EJEMPLOS</u> (1) El fibrado tangente de una vdad M.

$\tau_M : TM \longrightarrow M$ f.v. de rango m $\wedge$ $\dim M = m$

$\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ $\wedge$ $[\![\ ]\!] = [\ ,\ ]$

$\rho = Id : TM \longrightarrow TM$

(2) Álgebras de Lie de dimensión finita

$\mathfrak{g}$ álgebra de Lie con $\dim \mathfrak{g} = n$ y $M = \{x_0\}$

$\tau : \mathfrak{g} \times \{x_0\} \cong \mathfrak{g} \longrightarrow \{x_0\}$ f.v. de rango n

$\Gamma(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}$ $\wedge$ $[\![\ ]\!] = [\ ]_{\mathfrak{g}}$ $\wedge$ $\rho \equiv 0$.

③ Algebroide de Lie acción sobre una aplicación diferenciable.

$(E, [\![\,]\!], \rho)$ algebroide de Lie sobre una vdad M

$\pi : P \longrightarrow M$ aplicación diferenciable

Una acción de E sobre π es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal

$$* : \Gamma(E) \longrightarrow \mathfrak{X}(P)$$
$$X \longmapsto X^*$$

tal que:

$$(fX)^* = (f\circ\pi)X^*, \quad [\![X,Y]\!]^* = [X^*, Y^*], \quad \underbrace{T_p\pi(X^*_p)}_{\in\, T_{\pi(p)}M} = \rho(X_{\pi(p)})$$

$f \in C^\infty(M)$, $X, Y \in \Gamma(E)$, $p \in P$. $\qquad X^*(f\circ\pi) = \rho(X)(f)\circ\pi$

En tal caso, el fibrado vectorial pullback de E mediante π,

$$\pi^*E = \{(p,e) \in P \times E \ / \ \tau(e) = \pi(p)\}$$

es un algebroide sobre P con la estructura de algebroide de Lie $([\![\,]\!]_\pi, \rho_\pi)$

con proyección $pr_1 : \pi^*E \longrightarrow P$

caracterizada por

$$[\![X,Y]\!]_\pi = [\![X,Y]\!]\circ\pi \quad , \quad \rho_\pi(X)(p) = X^*(p) \qquad X, Y \in \Gamma(E),\ p \in P.$$

El triple $(\pi^*E, [\![\,]\!]_\pi, \rho_\pi)$ se denomina el algebroide de Lie acción de E sobre π y se denota por $E \ltimes \pi$ o $E \ltimes P$.

④ Algebroide de Atiyah asociado a un fibrado principal.

Sea $\pi : Q \longrightarrow M$ fibrado principal con grupo estructural G.

($\phi : G\times Q \to Q$ acción t.q. Q/G es una vdad dif. , $\pi : Q \longrightarrow Q/G = M$ submersión)

Consideramos $\tau_Q : TQ \longrightarrow Q$ algebroide de Lie (trivial) y la acción tangente $\phi^T : G \times TQ \longrightarrow TQ$.

Como el corchete de dos campos de vectores G-invariantes es tb G-invariante, obtenemos una estructura de algebroide de Lie $([\![\,]\!], \rho)$ sobre el f.v. cociente $\tau_Q|G : TQ/G \longrightarrow Q/G = M$

$[\![\,]\!]$ = restricción de $[\,]$ de TQ a los campos G-invariantes $\phi^T_g(X) = X,\ \forall g$)

ρ verifica
$$\begin{tikzcd} TQ \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "{[\pi]}"'] & TQ \arrow[d, "T\pi"] \\ TQ/G \arrow[r, "\rho"] & T(Q/G) \end{tikzcd}$$

A $(TQ/G, [\![\,]\!], \rho)$ se le denomina algebroide de Atiyah asociado al fibrado principal $\pi : Q \longrightarrow Q/G = M$.

• Sea $(E, [\![\,]\!], \rho)$ un algebroide de Lie sobre M. Sea $\mathcal{F}^E$ la foliación en M [illegible] $\mathcal{F}^E_x \subseteq T_xM$ subesp. con espacio característico en un punto $x \in M$

$$\mathcal{F}^E(x) = \rho(E_x) \qquad \text{siendo} \quad E_x = \tau^{-1}(x) \quad \text{fibra de } E \text{ en } x.$$

La distribución $\mathcal{F}^E$ está finitamente generada y es involutiva, luego $\mathcal{F}^E$ define una foliación generalizada sobre M. $\mathcal{F}^E$ es <u>la foliación del algebroide de Lie</u> E sobre M.

* Sobre un algebroide de Lie $(E, [\![\,]\!], \rho)$ se puede definir <u>la diferencial exterior de E</u> como

$$d^E : \Gamma(\Lambda^k E^*) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^{k+1} E^*)$$

$$d^E\mu(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \rho(X_i)(\mu(X_0 \dots \hat{X}_i \dots X_k)) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \mu([\![X_i, X_j]\!], X_0, \dots \hat{X}_i \dots \hat{X}_j \dots X_k)$$

$\mu \in \Gamma(\Lambda^k E^*)$ $\wedge$ $X_0, \dots, X_k \in \Gamma(E)$.

<u>PDAD:</u> d^E es un operador de cohomología, e.d., $(d^E)^2 = 0$.

. Además, si $X \in \Gamma(E)$, se puede definir <u>la derivada de Lie con respecto a X</u> como el operador

$$\mathcal{L}^E_X : \Gamma(\Lambda^k E^*) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^k E^*)$$

$$\mathcal{L}^E_X = i_X \circ d^E + d^E \circ i_X$$

<u>Nota:</u> Si $E = TM$, entonces d^{TM} y $\mathcal{L}^{TM}_X$ son la diferencial usual y la derivada de Lie usual respecto a $X \in \mathfrak{X}(M)$, respectivamente.

* <u>COORDENADAS</u>

$(x^i)_{i=1-m}$ coordenadas locales en M ($\mathcal{U}$ abto de M)

$\{e_\alpha\}_{\alpha=1-n}$ base local de secciones de $\tau : E \longrightarrow M$

$e \in E$: $e = (x^i, y^\alpha)$ con $e = y^\alpha \cdot e_\alpha(\tau(e))$

La estructura de algebroide de Lie está determinada por las funciones locales ρ^i_α y $C^\gamma_{\alpha\beta}$ sobre M, que se denominan <u>funciones de estructura</u> del algebroide de Lie y vienen determinadas por las relaciones

$$\rho(e_\alpha) = \rho^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$[\![e_\alpha, e_\beta]\!] = C^\gamma_{\alpha\beta}\, e_\gamma$$

Además satisfacen las <u>ecs de estructura</u>:

$$\rho^j_\alpha \frac{\partial \rho^i_\beta}{\partial x^j} - \rho^j_\beta \frac{\partial \rho^i_\alpha}{\partial x^j} = \rho^i_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta} \quad \wedge \quad \sum_{\text{cicl}(\alpha,\beta,\gamma)} \left(\rho^i_\alpha \frac{\partial C^\omega_{\beta\gamma}}{\partial x^i} + C^\mu_{\beta\gamma} C^\omega_{\alpha\mu} \right) = 0$$

• Para $f \in C^\infty(M)$: $\quad d^E f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \rho^i_\alpha e^\alpha \qquad \{e^\alpha\}$ base dual de $\{e_\alpha\}$

Para $\theta \in \Gamma(E^*)$ t.q. $\theta = \theta_\gamma e^\gamma \Rightarrow d^E\theta = \left(\frac{\partial \theta_\gamma}{\partial x^i}\rho^i_\beta - \frac{1}{2}\theta_\alpha C^\alpha_{\beta\gamma}\right) e^\beta \wedge e^\gamma$

En particular: $\quad d^E x^i = \rho^i_\alpha e^\alpha \quad \wedge \quad d^E e^\alpha = -\frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma}\, e^\beta \wedge e^\gamma$.

DEF: Sean $(E, [\![\,]\!], \rho)$ y $(E', [\![\,]\!]', \rho')$ algebroides de Lie sobre M y M', respectivamente, y sea (F, f) un morfismo de f.v. de E en E'.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\tau"'] & E' \arrow[d, "\tau'"] \\ M \arrow[r, "f"] & M' \end{tikzcd}$$

El par (F, f) es un morfismo de algebroides de Lie si

(*) $\quad d^E((F,f)^*\phi') = (F,f)^*(d^{E'}\phi') \qquad \forall \phi' \in \Gamma(\Lambda^k(E')^*) \quad , \forall k \geq 0$.

Nótese que $(F,f)^*\phi'$ es la sección del f.v. $\Lambda^k E^* \longrightarrow M$ definida por

$$((F,f)^*\phi')_x (a_1, \dots, a_k) = \phi'_{f(x)}(F(a_1), \dots, F(a_k))$$

con $x \in M \ \wedge \ a_1, \dots, a_k \in E_x$, $k > 0 \quad$ y por $(F,f)^*(g') = g' \circ f \quad , \forall g' \in C^\infty(M')$.

La condición (*) se satisface si y sólo si

$$\begin{cases} d^E(g' \circ f) = (F,f)^*(d^{E'}g') & \forall g' \in C^\infty(M') \\ d^E((F,f)^*\alpha') = (F,f)^*(d^{E'}\alpha') & \forall \alpha' \in \Gamma((E')^*) \end{cases}$$

• Si $M = M'$ y $f = id_M : M \longrightarrow M$, entonces (F, id_M) es un morfismo de algebroides de Lie si y sólo si

$$F[\![X,Y]\!] = [\![FX, FY]\!]' \quad \wedge \quad \rho'(FX) = \rho(X) \qquad , \forall X, Y \in \Gamma(E).$$

• Si (F, f) es un morfismo de algebroides de Lie, f es una inmersión inyectiva ($T_x f : T_xM \to T_{f(x)}M'$ es inyectiva, $\forall x \in M$) y $F_{|E_x} : E_x \longrightarrow E'_{f(x)}$ es inyectiva, $\forall x \in M$, entonces se dice que $(E, [\![\,]\!], \rho)$ es un subalgebroide de Lie de $(E', [\![\,]\!]', \rho')$.

* Sea $(E, [\![\,]\!], \rho)$ un algebroide de Lie sobre M y E^* el fibrado dual de E. Entonces E^* admite una estructura de Poisson lineal Λ_{E^*} (e.d. Λ_{E^*} es un 2-vector en E^*, $[\Lambda_{E^*}, \Lambda_{E^*}]_{TE^*} = 0 \ \wedge$ si f, g son funciones lineales en E^*: $\Lambda_{E^*}(d^{TE^*}f, d^{TE^*}g)$ es tb una función lineal en E^*)

$(x^i)_{i=1-m}$ coordenadas locales en M

$\{e_\alpha\}_{\alpha=1-n}$ base local de $\Gamma(E)$ y $\{e^\alpha\}_{\alpha=1-n}$ su base dual

(x^i, y_α) coordenadas locales en E^*

$$\Rightarrow \Lambda_{E^*} = \frac{1}{2} C^\gamma_{\alpha\beta}\, y_\gamma \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \wedge \frac{\partial}{\partial y_\beta} + \rho^i_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \wedge \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$\Rightarrow$ Corchete de Poisson lineal de funciones de E^*:

$$\{F, G\}_{E^*} = \Lambda_{E^*}(d^{TE^*}F, d^{TE^*}G) \qquad \forall F, G \in C^\infty(E^*).$$

$$\Rightarrow \{F, G\}_{E^*} = \rho^i_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial G}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial y_\alpha}\frac{\partial G}{\partial x^i}\right) - C^\gamma_{\alpha\beta}\, y_\gamma \frac{\partial F}{\partial y_\alpha}\frac{\partial G}{\partial y_\beta}.$$

* Prolongación de un algebroide de Lie mediante una aplicación diferenciable.

$(E, [\![\,]\!], \rho)$ algebroide de Lie de rango n sobre una vdad M $\wedge$ $\dim M = m$

$f: P \longrightarrow M$ aplicación diferenciable

Consideramos el subcjto $\mathcal{T}^E P$ de $E \times TP$ definido por:

$$\mathcal{T}^E_p P = \{ (b, v) \in E_{f(p)} \times T_p P \;/\; \rho(b) = (T_p f)(v) \}$$

donde $Tf: TP \longrightarrow TM$ $\wedge$ $p \in P$.

Tomamos como proyección:

$$\tau^f : \mathcal{T}^E P \longrightarrow P$$
$$\tau^f(b, v) = \tau_P(v)$$

siendo $\tau_P : TP \longrightarrow P$ la proyección canónica.

Si $\dim P = m'$, se puede probar que:

$$\dim \mathcal{T}^E_p P = n + m' - \dim\left(\rho(E_{f(p)}) + (T_p f)(T_p P) \right).$$

Así, si suponemos que $\exists\, c \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\dim\left(\rho(E_{f(p)}) + (T_p f)(T_p P) \right) = c \qquad \forall p \in P$$

podemos concluir que $\mathcal{T}^E P$ es un f.v. sobre P con proyección $\tau^f : \mathcal{T}^E P \longrightarrow P$.

Además, se puede probar que existe una estructura de algebroide de Lie $([\![\,]\!]^f, \rho^f)$ sobre $\mathcal{T}^E P$ denominada la prolongación del algebroide de Lie E mediante la aplicación f o el fibrado E-tangente a P.

Dicha estructura viene dada como sigue. Primero, se puede ver que las secciones de $\tau^f : \mathcal{T}^E P \longrightarrow P$ están generadas por secciones proyectables, c.d.,

$\mathcal{X}(p) = (X(f(p)), \mathcal{U}_p)$, $X \in \Gamma(E)$, $\mathcal{U} \in \mathfrak{X}(P)$ f-proyectable a $\rho(X)$ $\left(Tf(\mathcal{U}) = \rho(X)\right)$.

Denotaremos $\mathcal{X} = (X, \mathcal{U})$.

Así, la estructura de algebroide de Lie es:

$$[\![\,]\!]^f : \Gamma(\mathcal{T}^E P) \times \Gamma(\mathcal{T}^E P) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{T}^E P)$$
$$[\![(X_1, \mathcal{U}_1), (X_2, \mathcal{U}_2)]\!]^f(p) = \left([\![X_1, X_2]\!](f(p)), [\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2](p) \right)$$
$$\underset{pr_2}{\rho^f} : \Gamma(\mathcal{T}^E P) \longrightarrow \mathfrak{X}(P)$$
$$\rho^f(X, \mathcal{U}) = \mathcal{U}.$$

- Por otra parte, si $pr_1 : \mathcal{T}^E P \longrightarrow E$ es la proyección canónica en el primer factor, entonces el par (pr_1, f) es un morfismo de algebroides de Lie

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}^E P \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "\tau^f"'] & E \arrow[d, "\tau"] \\ P \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

entre $(\mathcal{T}^E P, [\![\,]\!]^f, \rho^f)$ y $(E, [\![\,]\!], \rho)$.

• CASO PARTICULAR $f = \tau : E \longrightarrow M$

$(E, [\![\cdot,\cdot]\!], \rho)$ algebroide de Lie de rango n sobre una vdad M, $\dim M = m$

$\tau : E \longrightarrow M$ proyección (fibración)

Consideramos el fibrado E-tangente a E:

$\mathcal{T}^E E = \{(e, v) \in E \times TE \;/\; \rho(e) = (T\tau)(v)\}$

que es un algebroide de Lie de rango $2n$ con estructura de algebroide de Lie $([\![\cdot,\cdot]\!]^\tau, \rho^\tau)$ definida como sigue.

(x^i) coordenadas locales en M

$\{e_\alpha\}$ base local de secciones de $\tau : E \longrightarrow M$

$\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$ base local de secciones de $\tau^\tau : \mathcal{T}^E E \longrightarrow E$:

$$\mathcal{X}_\alpha(e) = \left(e_\alpha(\tau(e)), \rho_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_e\right)$$

$$\mathcal{V}_\alpha(e) = \left(0, \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\Big|_e\right)$$

$\Rightarrow (x^i, y^\alpha; z^\alpha, v^\alpha)$ coordenadas locales en $\mathcal{T}^E E$

Así:

$$[\![\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta]\!]^\tau = C_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{X}_\gamma \quad , \quad [\![\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\beta]\!]^\tau = [\![\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta]\!]^\tau = 0$$

$$\rho^\tau(\mathcal{X}_\alpha) = \rho_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \quad \rho^\tau(\mathcal{V}_\alpha) = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

objetos canónicos de $\tau^\tau : \mathcal{T}^E E \longrightarrow E$:

• La <u>sección de Euler Δ</u> definida por

$$\Delta : E \longrightarrow \mathcal{T}^E E$$
$$e \longmapsto \Delta(e) = (0, e_e^V)$$

donde $\,^V_e : E_{\tau(e)} \longrightarrow T_e(E_{\tau(e)})$ isomorfismo canónico

$$a \longmapsto a_e^V = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(e + ta)$$

Localmente,

$$\Delta = y^\alpha \mathcal{V}_\alpha$$

• El <u>endomorfismo vertical S</u>: $\mathcal{T}^E E \longrightarrow \mathcal{T}^E E$

$$S(b, X_a) = (0, b_a^V)$$

Localmente, $S(\mathcal{X}_\alpha) = \mathcal{V}_\alpha$ ∧ $S(\mathcal{V}_\alpha) = 0$, $\forall \alpha = 1 - n$.

• Una sección ξ de $\tau^\tau : \mathcal{T}^E E \longrightarrow E$ se dice que es una <u>ecuación diferencial de segundo orden (SODE)</u> si

$$S(\xi) = \Delta$$

o equivalentemente, $pr_1(\xi(e)) = e$, $\forall e \in E$.

<u>Nota:</u> Si $\tau = \tau_M : TM \longrightarrow M$, entonces $\mathcal{T}^{TM} TM \cong T(TM)$

$\Delta = C : TM \longrightarrow T(TM)$ campo de Liouville $\quad C = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$

$S = J : T(TM) \longrightarrow T(TM)$, $J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$, $J\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0$

• <u>CASO PARTICULAR $f = \tau : E \longrightarrow M$</u>

$(E, [\![\,]\!], \rho)$ algebroide de Lie de rango n sobre una vdad M, $\dim M = m$

$\tau : E \longrightarrow M$ proyección

Consideramos el fibrado E-tangente a E:

$\mathcal{T}^E E = \{ (e, v) \in E \times TE \ / \ \rho(e) = (T\tau)(v) \}$

que es un algebroide de Lie de rango $2n$ con estructura de algebroide de Lie $([\![\,]\!]^\tau, \rho^\tau)$ definida como sigue.

(x^i) coordenadas locales en M

$\{e_\alpha\}$ base local de secciones de $\tau : E \longrightarrow M$

$\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$ base local de secciones de $\tau^\tau : \mathcal{T}^E E \longrightarrow E$:

$$\mathcal{X}_\alpha(e) = \left(e_\alpha(\tau(e)), \ \rho^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_e \right)$$

$$\mathcal{V}_\alpha(e) = \left(0, \ \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\Big|_e \right)$$

$\Rightarrow (x^i, y^\alpha ; z^\alpha, v^\alpha)$ coordenadas locales en $\mathcal{T}^E E$

Así :

$$[\![\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta]\!]^\tau = C^\gamma_{\alpha\beta} \mathcal{X}_\gamma \ , \quad [\![\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\beta]\!]^\tau = [\![\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta]\!]^\tau = 0$$

$$\rho^\tau(\mathcal{X}_\alpha) = \rho^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i} \ , \quad \rho^\tau(\mathcal{V}_\alpha) = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

objetos canónicos de $\tau^\tau : \mathcal{T}^E E \longrightarrow E$:

• La <u>sección de Euler Δ</u> definida por

$$\Delta : E \longrightarrow \mathcal{T}^E E$$
$$e \longmapsto \Delta(e) = (0, e^V_e)$$

donde $\overset{V}{e} : E_{\tau(e)} \longrightarrow T_e(E_{\tau(e)})$ isomorfismo canónico

$$a \longmapsto a^V_e = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (e + ta)$$

Localmente,

$$\Delta = y^\alpha \mathcal{V}_\alpha$$

• El <u>endomorfismo vertical S</u> $: \mathcal{T}^E E \longrightarrow \mathcal{T}^E E$

$$S(b, X_a) = (0, b^V_a)$$

Localmente, $S(\mathcal{X}_\alpha) = \mathcal{V}_\alpha$, $S(\mathcal{V}_\alpha) = 0$, $\forall \alpha = 1 \ldots n$.

• una sección ξ de $\tau^\tau : \mathcal{T}^E E \longrightarrow E$ se dice que es una <u>ecuación diferencial de segundo orden (SODE)</u> si

$$S(\xi) = \Delta$$

o equivalentemente, $pr_1(\xi(e)) = e$, $\forall e \in E$.

<u>Nota:</u> Si $\tau = \tau_M : TM \longrightarrow M$, entonces, $\mathcal{T}^{TM} TM \cong T(TM)$

$\Delta = C : TM \longrightarrow T(TM)$ campo de Liouville $\quad C = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$

$S = J : T(TM) \longrightarrow T(TM)$, $J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$, $J\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0$

- <u>CASO PARTICULAR $f = \tau^*: E^* \longrightarrow M$</u>

$(E, [\![\,]\!], \rho)$ algebroide de Lie de rango n sobre una vdad M $\wedge$ $\dim M = m$

$\tau^*: E^* \longrightarrow M$ f.v. dual

Consideramos el fibrado E-tangente a E^*:

$$\mathcal{T}^E E^* = \{ (e, v) \in E \times TE^* \ / \ \rho(e) = (T\tau^*)(v) \}$$

que es un algebroide de Lie de rango $2n$ con estructura de algebroide de Lie $([\![\,]\!]^{\tau^*}, \rho^{\tau^*})$ definida como sigue.

(x^i) coordenadas locales en M

$\{e_\alpha\}$ base local de $\tau: E \longrightarrow M$ $\Rightarrow$ $(x^i y^\alpha)$ coordenadas locales en E

$\{e^\alpha\}$ su base dual $\Rightarrow$ $(x^i y_\alpha)$ coordenadas locales en E^*

$\{\mathcal{Y}_\alpha, \mathcal{U}_\alpha\}$ base local de secciones de $\tau^{\tau^*}: \mathcal{T}^E E^* \longrightarrow E^*$

$$\mathcal{Y}_\alpha(e^*) = \left(e_\alpha(\tau^*(e^*)), \ \rho_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{e^*} \right)$$

$$\mathcal{U}_\alpha(e^*) = \left(0, \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\Big|_{e^*} \right)$$

$\Rightarrow$ $(x^i, y_\alpha; z^\alpha, u^\alpha)$ coordenadas locales en $\mathcal{T}^E E^*$.

Así:

$$[\![\mathcal{Y}_\alpha, \mathcal{Y}_\beta]\!]^{\tau^*} = C_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{Y}_\gamma \quad , \quad [\![\mathcal{Y}_\alpha, \mathcal{U}_\beta]\!]^{\tau^*} = [\![\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{U}_\beta]\!]^{\tau^*} = 0$$

$$\rho^{\tau^*}(\mathcal{Y}_\alpha) = \rho_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \quad \rho^{\tau^*}(\mathcal{U}_\alpha) = \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$$

Objetos canónicos de $\tau^{\tau^*}: \mathcal{T}^E E^* \longrightarrow E^*$:

- La <u>sección de Liouville λ_E</u> definida por

$$\lambda_E : E^* \longrightarrow (\mathcal{T}^E E^*)^*$$
$$e^* \longmapsto \lambda_E(e^*) : \mathcal{T}^E_{e^*} E^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(e, X_{e^*}) \mapsto \lambda_E(e^*)(e, X_{e^*}) = e^*(e)$$

Localmente,

$$\lambda_E = y_\alpha \cdot \mathcal{Y}^\alpha$$ $\{\mathcal{Y}^\alpha, \mathcal{U}^\alpha\}$ base dual de $\{\mathcal{Y}_\alpha, \mathcal{U}_\alpha\}$

- La <u>sección simpléctica canónica Ω_E</u> $\in \Gamma(\Lambda^2(\mathcal{T}^E E^*)^*)$:

$$\Omega_E = - d^{\mathcal{T}^E E^*} \lambda_E$$

Localmente,

$$\Omega_E = \mathcal{Y}^\alpha \wedge \mathcal{U}^\alpha + \frac{1}{2} C_{\alpha\beta}^\gamma y_\gamma \mathcal{Y}^\alpha \wedge \mathcal{Y}^\beta$$

<u>**Nota:**</u> Si $\tau = \tau_M : TM \longrightarrow M$, entonces $\mathcal{T}^{TM}(T^*M) \cong T(T^*M)$

$\lambda_{TM} = \lambda_M : T^*M \longrightarrow T^*(T^*M)$ 1-forma de Liouville de T^*M

$$\lambda_M(\alpha)(X) = \alpha(T_\alpha \pi_M(X)) \qquad \lambda_M = p_i \, dx^i$$

$\Omega_{TM} = \omega_M : T^*M \longrightarrow \Lambda^2 T^*(T^*M)$ estructura simpléctica canónica de T^*M.

$$\omega_M = dx^i \wedge dp_i$$

Por lo tanto, las curvas integrales de Γ_L (e.d. las curvas integrales del campo de vectores $\rho^E(\Gamma_L)$) son las soluciones de las ecs de Euler-Lagrange para L. La sección Γ_L se denomina sección de Euler-Lagrange asociada a L.

Localmente,

$$L \text{ es regular } \Leftrightarrow (W_{\alpha\beta}) = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}\right) \text{ es regular}$$

$$\Gamma_L = y^\alpha \mathcal{X}_\alpha + f^\alpha \mathcal{V}_\alpha \quad \text{, donde } f^\alpha \text{ verifican:}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} f^\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial y^\alpha} \rho^i_\beta y^\beta + \frac{\partial L}{\partial y^\gamma} C^\gamma_{\alpha\beta} y^\beta - \rho^i_\alpha \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

EJEMPLOS ① El fibrado tangente de una vdad M. Dada una función Lagrangiana estándar $L: TM \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces las ecs resultantes son las ecs de Euler-Lagrange clásicas para L.

② Álgebras de Lie de dimensión finita. Sea $L: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Lagrangiana sobre un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita. Entonces las ecs de E-L para L son las bien conocidas ecs de Euler-Poincaré.

③ Algebroides de Lie acción. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dim finita y $\Phi: \mathfrak{g} \times V^* \longrightarrow V^*$ una representación lineal de $\mathfrak{g}$ sobre V^*. Si $L: \mathfrak{g} \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función Lagrangiana sobre el algebroide de Lie acción $\mathfrak{g} \times V^* \longrightarrow V^*$, entonces las ecs de E-L para L son las denominadas ecs Euler-Poisson-Poincaré.

④ Algebroide de Atiyah. Sea $L: TQ/G \longrightarrow \mathbb{R}$ función Lagrangiana en el algebroide de Atiyah $\tau_Q|G: TQ/G \longrightarrow Q/G$. Las ecs de E-L para L son las ecs de Lagrange-Poincaré.

3.- FORMALISMO HAMILTONIANO

$(E, [\![\,]\!], \rho)$ algebroide de Lie de rango n sobre una vdad M, $\dim M = m$.

$H: E^* \longrightarrow \mathbb{R}$ función Hamiltoniana

$(\mathcal{T}^E E^*, [\![\,]\!]^{E^*}, \rho^{E^*})$ algebroide de Lie E-fibrado tangente a E^*

Como Ω_E es una 2-sección simpléctica sobre $\mathcal{T}^E E^*$, $\exists!\, \Gamma_H \in \Gamma(\mathcal{T}^E E^*)$:

$$i_{\Gamma_H} \Omega_E = d^{\mathcal{T}^E E^*} H$$

Γ_H = sección Hamiltoniana asociada a la función H con respecto a la estructura simpléctica Ω_E.

Localmente,

$$\Gamma_H = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} \mathcal{Y}_\alpha - \left(C^\gamma_{\alpha\beta} y_\gamma \frac{\partial H}{\partial y_\beta} + \rho^i_\alpha \frac{\partial H}{\partial x^i}\right) \mathcal{U}_\alpha$$

Así, el campo de vectores $\rho^{\tau^*}(T_H)$ en E^* nos da la dinámica, e.d., las curvas integrales de $\rho^{\tau^*}(T_H)$ son las soluciones de las ecuaciones de Hamilton para H.
En coordenadas,

$$\rho^{\tau^*}(T_H) = \rho^i_\alpha \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}\frac{\partial}{\partial x^i} - \left(C^\gamma_{\alpha\beta} y_\gamma \frac{\partial H}{\partial y_\beta} + \rho^i_\alpha \frac{\partial H}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial y_\alpha}$$

$$\boxed{\frac{dx^i}{dt} = \rho^i_\alpha \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} \quad , \quad \frac{dy_\alpha}{dt} = -\left(C^\gamma_{\alpha\beta} y_\gamma \frac{\partial H}{\partial y_\beta} + \rho^i_\alpha \frac{\partial H}{\partial x^i}\right)}$$

EJEMPLOS: ① El fibrado tangente a una vdad. Si $E = TM$ y $H: T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función Hamiltoniana, las ecs resultantes son las ecs de Hamilton clásicas para H. $\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}$

② Álgebras de Lie de dimensión finita. Las ecs de Hamilton para $H: \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ son las conocidas ecs de Lie-Poisson.

③ Algebroides de Lie acción. Las ecs de Hamilton para una función Hamiltoniana $H: \mathfrak{g}\times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre el algebroide de Lie acción $\mathfrak{g}\times V^* \longrightarrow V^*$ son las ecs. de Lie-Poisson sobre el dual del producto semidirecto de álgebras de Lie $\mathfrak{g} \circledS V$.

④ Algebroide de Atiyah. Las ecs de Hamilton para $H: T^*Q/G \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Hamiltoniana sobre el algebroide de Atiyah $\tau_Q|G: TQ/G \longrightarrow Q/G$ son las ecs de Hamilton-Poincaré.

⊛ Evolución de un observable: $f \in C^\infty(E^*)$: $\dot f = \rho^{\tau^*}(T_H)(f) = \{f, H\}_{E^*}$

4: LA TRANSFORMACIÓN DE LEGENDRE Y LA EQUIVALENCIA ENTRE LOS FORMALISMOS LAGRANGIANO Y HAMILTONIANO.

$(E, [\![\,]\!], \rho)$ algebroide de Lie de rango n sobre una vdad M, $\dim M = m$.

$L: E \longrightarrow \mathbb{R}$ función Lagrangiana

$\Theta_L \in \Gamma((\mathcal{T}^E E)^*)$ 1-sección de Poincaré-Cartan asociada a L

• La <u>transformación de Legendre asociada a L</u>:

$$Leg_L: E \longrightarrow E^*$$

$$Leg_L(a)(b) = \Theta_L(a)(z) \quad ,$$

$$a, b \in E_x, x \in M \quad , \quad z \in \mathcal{T}^E_a E \ : \ pr_1(z) = b$$

$Leg_L: E \longrightarrow E^*$

$a_x \longmapsto Leg_L(a_x): E_x \longrightarrow \mathbb{R}$

$b_x \longmapsto \ldots$

Está bien definida y, en coordenadas,

$$Leg_L(x^i, y^\alpha) = \left(x^i, \frac{\partial L}{\partial y^\alpha}\right).$$

- La transformación de Legendre induce:

<u>$\mathcal{T} Leg_L$</u>: $\mathcal{T}^E E \longrightarrow \mathcal{T}^E E^*$

$$(\mathcal{T} Leg_L)(b, X_a) = (b, (T_a Leg_L)(X_a))$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^E E & \xrightarrow{\mathcal{T} Leg_L} & \mathcal{T}^E E^* \\ \downarrow \tau^E & & \downarrow \tau^{E^*} \\ E & \xrightarrow{Leg_L} & E^* \end{array}$$

siendo $TLeg_L: TE \longrightarrow TE^*$ la aplicación tangente de Leg_L. Localmente,

$$\mathcal{T} Leg_L(x^i, y^\alpha; z^\alpha, v^\alpha) = \left(x^i, \frac{\partial L}{\partial y^\alpha}; z^\alpha, \rho^i_\beta z^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial y^\alpha} + v^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}\right)$$

TEOREMA: El par $(\mathcal{T}Leg_L, Leg_L)$ es un morfismo entre los algebroides de Lie $(\mathcal{T}^E E, [\![\,]\!]^{E}, \rho^{E})$ y $(\mathcal{T}^E E^*, [\![\,]\!]^{E^*}, \rho^{E^*})$. Además:

$$(\mathcal{T}Leg_L, Leg_L)^* \lambda_E = \Theta_L \quad \wedge \quad (\mathcal{T}Leg_L, Leg_L)^* \Omega_E = \omega_L .$$

PROPOSICIÓN: El Lagrangiano L es regular sii Leg_L es un difeomorfismo local.

- Diremos que L es <u>hiperregular</u> si Leg_L es un difeomorfismo global.

En tal caso, $(\mathcal{T}Leg_L, Leg_L)$ es un isomorfismo de algebroides de Lie y además, podemos construir la función Hamiltoniana siguiente:

$$H: E^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$H = E_L \circ Leg_L^{-1}$$

TEOREMA: Si la función Lagrangiana L es hiperregular, entonces la sección de Euler-Lagrange Γ_L asociada con L y la sección Hamiltoniana Γ_H están $(\mathcal{T}Leg_L, Leg_L)$-relacionadas, e.d.,

$$\Gamma_H \circ Leg_L = \mathcal{T}Leg_L \circ \Gamma_L .$$

Además, si $\gamma: I \longrightarrow E$ es una solución de las ecs de E-L asociadas a L, entonces $\mu = Leg_L \circ \gamma : I \longrightarrow E^*$ es una solución de las ecs de Hamilton para H.

Recíprocamente, si $\mu: I \longrightarrow E^*$ " " " " " " " " " " ,

entonces $\gamma = Leg_L^{-1} \circ \gamma : I \longrightarrow E$ " " " " " " " E-L asociadas a L.

5.- EJEMPLO PARTICULAR: HEAVY TOP

HEAVY TOP = cuerpo rígido con un punto fijo moviéndose en un campo gravitacional.

* <u>ALGEBROIDE ACCIÓN</u>

$\mathfrak{g}$ álgebra de Lie

M vdad ([illegible] def. [illegible] sobre $Id \Rightarrow Id^*\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \times M$.)

Acción de $\mathfrak{g}$ sobre M, e.d., un homomorfismo de álgebras de Lie

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$\xi \longmapsto \xi_M$$

$\Rightarrow$ El algebroide de Lie acción es $E = M \times \mathfrak{g}$

$$\tau_E = pr_1 : M \times \mathfrak{g} \longrightarrow M$$

$$(m, \xi) \longmapsto m$$

$$\rho : M \times \mathfrak{g} \longrightarrow TM$$

$$(m, \xi) \longmapsto \xi_M(m) \in T_m M$$

<u>NOTA.</u> $\sigma \in \Gamma(M \times \mathfrak{g}) \Rightarrow \sigma : M \longrightarrow M \times \mathfrak{g}$

$m \longmapsto \sigma(m) = (m, \xi(m))$

en general depende del pto m

e.d. ξ es una función

$\xi : M \longrightarrow \mathfrak{g}$

$m \longmapsto f^{\alpha}(m) \cdot e_{\alpha}$

$$[\![\,]\!] : \Gamma(M \times \mathfrak{g}) \times \Gamma(M \times \mathfrak{g}) \longrightarrow \Gamma(M \times \mathfrak{g})$$

$$(\sigma, \eta) \longmapsto [\![\sigma, \eta]\!] : M \longrightarrow M \times \mathfrak{g}$$

Para secciones constantes $\sigma(m) = (m, \xi)$ $\eta(m) = (m, \zeta)$

$$m \longmapsto [\![\sigma, \eta]\!](m) = (m, [\xi, \zeta]_{\mathfrak{g}})$$

• Formalismo Lagrangiano:

$$TE = T(M\times\mathfrak{g}) \cong TM\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$$

$$\Downarrow$$

$$\tau^E E = \tau^{M\times\mathfrak{g}} M\times\mathfrak{g} = \{((m,\eta),(v_m,\xi,\zeta)) \in M\times\mathfrak{g}\times TM\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \;/\; \eta_M(m) = v_m\} \cong M\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$$

$((m,\eta),(v_m,\xi,\zeta)) \longleftrightarrow (m,\xi,\eta,\zeta)$ ¡OJO ORDEN!

con proyección

$$\tau_1 : \tau^{M\times\mathfrak{g}}(M\times\mathfrak{g}) \longrightarrow M\times\mathfrak{g}$$
$$(m,\xi,\eta,\zeta) \longmapsto (m,\xi)$$

Tb tenemos la proyección

$$\tau_2 : \tau^{M\times\mathfrak{g}}(M\times\mathfrak{g}) \longrightarrow M\times\mathfrak{g}$$
$$(m,\xi,\eta,\zeta) \longmapsto (m,\eta)$$

y aplicación ancla

$$\rho^1 : \tau^{M\times\mathfrak{g}}(M\times\mathfrak{g}) \longrightarrow T(M\times\mathfrak{g}) \cong TM\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$$
(ρ_2'') $$(m,\xi,\eta,\zeta) \longmapsto (\eta_M(m),\xi,\zeta)$$

Consideramos un Lagrangiano $L\in C^\infty(M\times\mathfrak{g})$ de tipo mecánico, esto es,

$$L(m,\xi) = \frac{1}{2}\,g(\xi,\xi) - V(m)$$

siendo g una métrica sobre $\mathfrak{g}$ y $V\in C^\infty(M)$ el potencial.

. La sección de Euler $\Delta : M\times\mathfrak{g} \longrightarrow \tau^{M\times\mathfrak{g}} M\times\mathfrak{g} \cong M\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$

$$(m,\xi) \longmapsto \Delta(m,\xi) = (m,\xi,0,\xi)$$

. El endomorfismo vertical $S : \tau^{M\times\mathfrak{g}} M\times\mathfrak{g} \longrightarrow \tau^{M\times\mathfrak{g}} M\times\mathfrak{g}$

$$(m,\xi,\eta,\zeta) \longmapsto (m,\xi,0,\eta)$$

. 1 - sección de Poincaré-Cartan $\theta_L \in \Gamma((\tau^{M\times\mathfrak{g}} M\times\mathfrak{g})^*)$ asociada a L:

$$\theta_L : M\times\mathfrak{g} \longrightarrow (\tau^{M\times\mathfrak{g}} M\times\mathfrak{g})^*$$
$$(m,\xi) \longmapsto \theta_L(m,\xi) : \tau^{M\times\mathfrak{g}}_{(m,\xi)} M\times\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\eta,\zeta) \longmapsto \theta_L(m,\xi)(\eta,\zeta) = (d^{\tau^{M\times\mathfrak{g}} M\times\mathfrak{g}} L)(m,\xi,0,\eta)$$

Para obtener la expresión tener cuidado con las identificaciones y hacerlo en coordenadas.

$$\theta_L(m,\xi,\eta,\zeta) = g(\xi,\eta)$$

. 2 - sección de Poincaré-Cartan $\omega_L \in \Gamma((\tau^{M\times\mathfrak{g}} M\times\mathfrak{g})^*)$ asociada a L:

$$\omega_L((m,\xi,\eta_1,\zeta_1),(m,\xi,\eta_2,\zeta_2)) = g(\eta_1,\zeta_2) - g(\zeta_1,\eta_2) + g(\xi,[\eta_1,\eta_2]_{\mathfrak{g}})$$

$$\omega_L((m,\xi,\eta_1,\zeta_1),(m,\xi,\eta_2,\zeta_2)) = -(d^{\tau^{M\times\mathfrak{g}} M\times\mathfrak{g}}\theta_L)((m,\xi,\eta_1,\zeta_1),(m,\xi,\eta_2,\zeta_2)) =$$
$$= -(\eta_{1_M}(m),\xi,\zeta_1)(g(\xi,\eta_2)) + (\eta_{2_M}(m),\xi,\zeta_2)(g(\xi,\eta_1)) + \theta_L(m,\xi,[\eta_1,\eta_2]_{\mathfrak{g}},[\zeta_1,\zeta_2]_{\mathfrak{g}}) =$$
$$+ g(\xi,[\eta_1,\eta_2]_{\mathfrak{g}})$$

(Hacerlo en coordenadas)

. La energía Lagrangiana $E_L \in C^\infty(M\times\mathfrak{g})$: (Hay que hacerlo en coordenadas)

$$E_L(m,\xi) = \rho^1(\Delta)(L)(m,\xi) - L(m,\xi) = \frac{1}{2}\,g(\xi,\xi) + V(m).$$

La diferencial de la energía es:

$$d^{\tau^{M\times\mathfrak{g}}\, M\times\mathfrak{g}} E_L\,(m,\xi,\eta,\varsigma) = g(\xi,\varsigma) + \langle d^{M\times\mathfrak{g}} V(m), \eta\rangle$$

$V\in C^\infty(M)$ $\wedge$ $pr_1: M\times\mathfrak{g}\longrightarrow M$ alg $\Rightarrow d^{M\times\mathfrak{g}}V \in \Gamma(pr_1^*)$

$d^{M\times\mathfrak{g}}V: M\longrightarrow (M\times\mathfrak{g})^*$

$m\longmapsto (d^{M\times\mathfrak{g}}V)(m)\in\mathfrak{g}^*$

Por otro lado, $\Gamma\in\Gamma(\tau^{M\times\mathfrak{g}}\, M\times\mathfrak{g})$ es una SODE $(\Leftrightarrow \tau_2\circ\Gamma = 1_{M\times\mathfrak{g}} \Leftrightarrow S(\Gamma)=\Delta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Gamma(m,\xi) = (m,\xi,\xi,\varsigma)$. Entonces:

$$(i_\Gamma\omega_L - d^{\tau^{M\times\mathfrak{g}}\, M\times\mathfrak{g}} E_L)(m,\xi,\eta_2,\varsigma_2) = -g(\varsigma,\eta_2) + g(\xi,[\xi,\eta_2]_{\mathfrak{g}}) - \langle d^{M\times\mathfrak{g}}V(m),\eta_2\rangle$$

Si definimos ad^+_ξ y el gradiente de V por:

$$g(ad^+_\xi\eta_1,\eta_2) = g(\eta_1, \underbrace{[\xi,\eta_2]_{\mathfrak{g}}}_{ad_\xi\eta_2}) \quad\wedge\quad g(\mathrm{grad}V(m),\eta) = \langle d^{M\times\mathfrak{g}}V(m),\eta\rangle$$

$ad^+_\xi:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$ $\qquad$ $\mathrm{grad}V: M\longrightarrow M\times\mathfrak{g}$ $\quad \in\Gamma(M\times\mathfrak{g})$

$\eta\longmapsto ad^+_\xi\eta$ $\qquad$ $m\longmapsto (m,\mathrm{grad}V(m))$

tenemos que

$$(i_\Gamma\omega_L - d^{\tau^{M\times\mathfrak{g}}\, M\times\mathfrak{g}} E_L)(m,\xi,\eta_2,\varsigma_2) = -g(\varsigma,\eta_2) + g(ad^+_\xi\xi,\eta_2) - g(\mathrm{grad}V(m),\eta_2) =$$

$$= -g(\varsigma - ad^+_\xi\xi + \mathrm{grad}V(m),\eta_2)$$

luego si Γ es una solución de las ecs de Euler-Lagrange, e.d., $i_\Gamma\omega_L = d^{\tau^{M\times\mathfrak{g}}\, M\times\mathfrak{g}} E_L$, tenemos que:

$$\Gamma(m,\xi) = (m,\xi,\xi, ad^+_\xi\xi - \mathrm{grad}V(m)).$$

Así, las curvas integrales $(m(t),\xi(t))$ de Γ son las soluciones de las ecs diferenciales:

$$\boxed{\dot m = \xi(t)_M(m) \quad\wedge\quad \dot\xi - ad^+_\xi\xi = -\mathrm{grad}V(m)}$$

$(m(t),\xi(t))$ curva integral de $\Gamma \Rightarrow (m(t),\xi(t),\dot m(t),\dot\xi(t)) = \rho^1(\Gamma(m(t),\xi(t)))$

$\qquad (\dot m(t),\xi(t),\dot\xi(t)) \qquad \rho^1(m(t),\xi(t),\xi(t), ad^+_{\xi(t)}\xi(t) - \mathrm{grad}V(m(t)))$

$\qquad T(M\times\mathfrak{g})\cong TM\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \qquad (\xi(t)_M(m(t)), \xi(t), \quad '' \quad)$

- Formalismo Hamiltoniano:

$E^* = M\times\mathfrak{g}^*$ $\quad\wedge\quad$ $\tau^*_E = \tau^*_{M\times\mathfrak{g}}: M\times\mathfrak{g}^*\longrightarrow M$

$TE^* = T(M\times\mathfrak{g}^*)\cong TM\times\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*$

$\tau^E E^* = \tau^{M\times\mathfrak{g}}\, M\times\mathfrak{g}^* = \{((m,\eta),(v_m,\mu,\nu))\in M\times\mathfrak{g}\times TM\times\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^* \,/\, \eta_M(m) = v_m\}\cong M\times\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*$

con proyección $\qquad ((m,\eta),(v_m,\mu,\nu))\longleftrightarrow (m,\mu,\eta,\nu)$

$\pi_1: \tau^{M\times\mathfrak{g}}\, M\times\mathfrak{g}^*\longrightarrow M\times\mathfrak{g}^*$

$(m,\mu,\eta,\nu)\longmapsto (m,\mu)$

y aplicación ancla $\rho_1: \tau^{M\times\mathfrak{g}}\, M\times\mathfrak{g}^*\longrightarrow T(M\times\mathfrak{g}^*)\cong TM\times\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*$

$(m,\mu,\eta,\nu)\longmapsto (\eta_M(m),\mu,\nu)$

imagen por la acción

Consideramos un Hamiltoniano $H \in C^\infty(M \times \mathfrak{g}^*)$ de tipo mecánico:

$$H(m,\mu) = \frac{1}{2} G(\mu,\mu) + V(m)$$

donde G es la métrica inducida en $\mathfrak{g}^*$ y $V \in C^\infty(M)$ el potencial.

. La 2-sección simpléctica canónica $\Omega_{M\times\mathfrak{g}}$ está dada por:

$$\Omega_{M\times\mathfrak{g}}\left((m,\mu,\eta_1,\nu_1),(m,\mu,\eta_2,\nu_2)\right) = \langle \nu_2, \eta_1\rangle - \langle \nu_1, \eta_2 \rangle + \langle \mu, [\eta_1,\eta_2]_{\mathfrak{g}}\rangle .$$

. La sección de Liouville $\lambda_{M\times\mathfrak{g}} : M\times\mathfrak{g}^* \longrightarrow (\mathcal{T}^{M\times\mathfrak{g}} M\times\mathfrak{g}^*)^*$

$$(m,\mu) \longmapsto \lambda_{M\times\mathfrak{g}}(m,\mu) : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\eta,\nu) \longmapsto \langle \mu, \eta\rangle$$

$$\Omega_{M\times\mathfrak{g}}\left((m,\mu,\eta_1,\nu_1),(m,\mu,\eta_2,\nu_2)\right) = -\left(d^{\mathcal{T}^{M\times\mathfrak{g}} M\times\mathfrak{g}^*}\lambda_{M\times\mathfrak{g}}\right)\left((m,\mu,\eta_1,\nu_1),(m,\mu,\eta_2,\nu_2)\right) =$$

$$= -\left(\eta_{1_M}(m),\mu,\nu_1\right)\left(\langle\mu,\eta_2\rangle\right) + \left(\eta_{2_M}(m),\mu,\nu_2\right)\left(\langle\mu,\eta_1\rangle\right) + \lambda_{M\times\mathfrak{g}}\left(m,\mu,[\eta_1,\eta_2]_{\mathfrak{g}},[\nu_1,\nu_2]_{\mathfrak{g}^*}\right)$$

$$=$$

$$\langle \mu, [\eta_1,\eta_2]_{\mathfrak{g}}\rangle .$$

(En coordenadas)

Así, la sección Hamiltoniana $\Gamma_H \in \Gamma(\mathcal{T}^{M\times\mathfrak{g}} M\times\mathfrak{g}^*)$:

$$\Gamma_H : M\times\mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathcal{T}^{M\times\mathfrak{g}} M\times\mathfrak{g}^* \cong M\times\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*$$

$$(m,\mu) \longmapsto \Gamma_H(m,\mu) = (m,\mu,\eta,\nu)$$

$$\wedge \quad i_{\Gamma_H}\Omega_{M\times\mathfrak{g}} = d^{\mathcal{T}^{M\times\mathfrak{g}} M\times\mathfrak{g}^*} H$$

$$\left(i_{\Gamma_H}\Omega_{M\times\mathfrak{g}}\right)(m,\mu,\eta_2,\nu_2) = \langle \nu_2, \eta\rangle - \langle \nu, \eta_2\rangle + \langle\mu,[\eta,\eta_2]_{\mathfrak{g}}\rangle$$

$$\left(d^{\mathcal{T}^{M\times\mathfrak{g}} M\times\mathfrak{g}^*} H\right)(m,\mu,\eta_2,\nu_2) = \left(\eta_{2_M}(m),\mu,\nu_2\right)(H)$$

y obtenemos las ecs: $(m(t), \mu(t)) \in M\times\mathfrak{g}^*$ curva integral

$$\dot m = \rho^{M\times\mathfrak{g}\to TM}(G(\mu)) = \rho(m(t), G(\mu(t))) \qquad \dot\mu - \underbrace{ad^*_{G(\mu)}}_{\text{acción coadjunta}}\mu = -d^{M\times\mathfrak{g}^*} V \in T^*(M\times\mathfrak{g}^*) \cong T^*M\times T^*\mathfrak{g}^*$$

$\dot m \in T_{m(t)}M$

$\mathfrak{g}^*$; $T^*\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*$

$G : \mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$G(\mu) : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow G(\mu) \in \mathfrak{g}$

$(m(t), G(\mu(t))) \in M\times\mathfrak{g}$

$\rho : M\times\mathfrak{g} \longrightarrow TM$

* HEAVY TOP

$\mathfrak{g} = so(3)$ álgebra de Lie de $SO(3)$ Grupo Ortogonal Especial

$\overset{\cong}{\mathbb{R}^3}$ $\quad \hat{} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow so(3) \qquad \hat{v}\cdot w = v \times w$

$$v=(v_1 v_2 v_3) \longmapsto \hat{v} = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$M = S^2 = \{ \gamma \in \mathbb{R}^3 \,/\, \|\gamma\| = 1 \}$

La acción $so(3) \longrightarrow \mathfrak{X}(S^2)$

$$\hat{v} \longmapsto v : S^2 \longrightarrow TS^2$$
$$\gamma \longmapsto v_\gamma = (\gamma, \gamma \times v)$$

$\Rightarrow$ El algebroide de Lie acción en $E = S^2 \times so(3)$

$\tau_E = pr_1 : S^2 \times so(3) \longrightarrow S^2$

$$(\gamma, \omega) \longmapsto \gamma$$

$\rho : \underset{m}{S^2} \times \underset{\mathfrak{g}}{so(3)} \longrightarrow TS^2$

$$(\gamma, \omega) \longmapsto \rho(\gamma,\omega) = \gamma \times \omega \equiv (\gamma, \gamma\times\omega) \in T_\gamma S^2$$

$[\;] \equiv [\;]_{so(3)} : so(3) \times so(3) \longrightarrow so(3)$

$$(\omega_1, \omega_2) \longmapsto [\omega_1, \omega_2]_{so(3)} = \omega_1 \times \omega_2$$

. La métrica g está dada por el tensor de inercia del sistema:

$g(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 \cdot I\omega_2 \qquad g : so(3) \times so(3) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad I : so(3) \cong \mathbb{R}^3 \longrightarrow so(3) \cong \mathbb{R}^3$

y el potencial es: $\qquad V : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$V(\gamma) = mgl\; \gamma \cdot e$

donde m = masa del cuerpo

g = gravedad

l = distancia del punto fijo del cuerpo al centro de masa

e = vector unitario desde el punto fijo al centro de masa

. En este caso, para el formalismo Lagrangiano, tenemos que:

$ad^+_{\omega_1} \omega_2 = I^{-1}(I\omega_2 \times \omega_1) \quad \wedge \quad \text{grad}\, V(\gamma) = -mgl\, I^{-1}(\gamma \times e)$

y las ecs de movimiento son:

$\dot{\gamma} + \omega \times \gamma = 0 \quad \wedge \quad I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = mgl(\gamma \times e)$

que son las ecs de Euler-Arnold.

. En el formalismo Hamiltoniano obtenemos:

$\dot{\gamma} + I^{-1}\mu \times \gamma = 0 \quad \wedge \quad \dot{\mu} + (I^{-1}\mu \times \mu) = mgl(\gamma \times e)$

que son las ecs de Euler-Arnold en forma Hamiltoniana.

. $\mu \in \underset{(\mathbb{R}^{3*} \cong \mathbb{R}^3 \cong so(3))}{\overset{\cong}{so(3)^*}} \quad \wedge \quad I : so(3) \longrightarrow so(3)$

③ EVOLUCIÓN DE UN OBSERVABLE

$f \in C^\infty(E^*)$ observable, una función que la evaluamos sobre las trayectorias del sistema (e.d. las soluciones).

Tenemos que:

$$\dot{f} = \rho^{T^*}(T_H)(f) = \{f, H\}_{E^*}.$$