

# Sistemas de Lie y aplicaciones en Mecánica Clásica y Teoría de Control

Javier de Lucas Araújo

Basado en trabajos de J. F. Cariñena y A. Ramos

## 1 Sistemas de Lie.

Dada una variedad  $N = \mathbb{R}^n$  y un campo  $t$ -dependiente  $X$  definido sobre dicha variedad, se dice que la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \quad (1)$$

admite una estructura de sistema de Lie si existe una aplicación  $\Phi : \mathbb{R}^{n(m+1)} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que para un conjunto finito de soluciones independientes  $\{x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\}$  de la ecuación (1) se verifica que:

$$x(t) = \Phi(x^{(1)}(t), \dots, x^{(m)}(t), k_1, \dots, k_n) \quad (2)$$

es solución de (1) y toda solución de (1) se puede obtener como imagen por  $\Phi$  en términos del conjunto finito de soluciones escogidas para unos ciertos  $k_1 \dots, k_n$ .

**Nota 1.1.** Aunque aquí se han expuesto sistemas de Lie definidos sobre un espacio vectorial, la definición sobre variedades es equivalente a esta salvo porque en esta hay que tener en cuenta que los principios de superposición van a estar generalmente definidos localmente.

La caracterización del tipo de ecuaciones (1) que admiten una estructura de sistema de Lie fue llevada a cabo por Lie y puede encontrarse en [1]. Dicha caracterización se puede resumir en el siguiente enunciado que se puede encontrar en [2]:

**Teorema 1.1.** Dado un sistema no autónomo de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}, t) \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

una condición necesaria y suficiente para que exista un principio de superposición  $\Phi : \mathbb{R}^{n(m+1)} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que la solución general puede ser escrita como:

$$x = \Phi(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}; k_1, \dots, k_n), \quad (4)$$

con  $\{x^{(a)} | a = 1, \dots, m\}$  un conjunto de soluciones particulares independientes del sistema y  $k_1, \dots, k_n$  es un sistema de  $n$  constantes arbitrarias, es que el sistema se puede escribir como:

$$\frac{dx^i}{dt} = Z_1(t)\xi^{1i}(x) + \dots + Z_r(t)\xi^{ri}(x) \quad (5)$$

donde  $Z_1, \dots, Z_r$  son funciones que dependen de  $t$  sólo y  $\xi^{\alpha i}$ ,  $\alpha = 1, \dots, r$  son funciones de  $x = (x^1, \dots, x^n)$ , tal que los  $r$  campos vectoriales en  $\mathbb{R}^n$  dado por:

$$Y^{(\alpha)} \equiv \sum_{i=1}^n \xi^{\alpha i}(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \alpha = 1, \dots, r \quad (6)$$

cierra un álgebra de Lie real de dimensión  $r$ , p.e.  $Y^{(\alpha)}$  son linealmente independientes y existen  $r^3$  constantes de estructuras  $f_{\gamma}^{\alpha\beta}$ , tales que:

$$[Y^{(\alpha)}, Y^{(\beta)}] = \sum_{\gamma=1}^r f_{\gamma}^{\alpha\beta} Y^{(\gamma)} \quad (7)$$

donde  $r$  satisface  $r \leq mn$ .

## 2 Ejemplos de sistemas de Lie

Considérese la ecuación diferencial de Riccati:

$$\frac{dx}{dt} = b_0(t) + b_1(t)x + b_2(t)x^2 \quad (8)$$

que desde un punto de vista geométrico puede ser considerada como una ecuación diferencial que determina las curvas integrales del campo t-dependiente:

$$\Gamma = (b_0(t) + b_1(t)x + b_2(t)x^2) \frac{\partial}{\partial x} . \quad (9)$$

En esta ecuación diferencial se verifica la caracterización de Lie debido a que  $\Gamma$  es una combinación lineal con coeficientes dependientes del tiempo de los siguientes tres campos vectoriales:

$$L_0 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_1 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_2 = x^2 \frac{\partial}{\partial x}, \quad (10)$$

que cierra una álgebra de Lie de dimensión tres ya que las constantes de estructura son:

$$[L_0, L_1] = L_0, \quad [L_0, L_2] = 2L_1, \quad [L_1, L_2] = L_2. \quad (11)$$

Por tanto, este álgebra de Lie es isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ,

Otro de los ejemplo de sistemas de Lie son los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden lineales homogéneos:

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^n A^i_j(t) x^j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (12)$$

para el cual

$$X = \sum_{i,j=1}^n A^i_j(t) x^j \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (13)$$

que es una combinación lineal con coeficientes dependientes del tiempo

$$X = \sum_{i,j=1}^n A^i_j(t) X_{ij}, \quad (14)$$

de los  $n^2$  campos vectoriales

$$X_{ij} = x^j \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (15)$$

que verifican

$$[X_{ij}, X_{kl}] = \left[ x^j \frac{\partial}{\partial x^i}, x^l \frac{\partial}{\partial x^k} \right] = \delta^{il} x^j \frac{\partial}{\partial x^k} - \delta^{kj} x^l \frac{\partial}{\partial x^i},$$

p.e.

$$[X_{ij}, X_{kl}] = \delta^{il} X_{kj} - \delta^{kj} X_{il}, \quad (16)$$

lo cual significa que los campos vectoriales  $\{X_\alpha = X_{ij}, \alpha = (i-1)n + j\}$ , con  $i, j = 1, \dots, n$ , apareciendo en el caso de un sistema homogéneo, cierran un álgebra de Lie real de dimensión  $n^2$  isomorfa a  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ . De hecho, son los campos fundamentales de la acción natural de  $GL(n, \mathbb{R})$  en  $\mathbb{R}^n$ .

### 3 Formulación geométrica de los sistemas de Lie

Desde el punto de vista práctico, el punto importante de la visión geométrica de los sistemas de Lie es que los campos vectoriales  $X_\alpha$  que aparecen en las combinaciones lineales del campo vectorial  $t$ -dependiente que originan el sistema

$$X = \sum_{\alpha=1}^r b_\alpha(t) X_\alpha,$$

cierran una álgebra de Lie real finito dimensional  $\mathfrak{g}$ . Ahora, si imponemos que los campos vectoriales sean completos, definen una acción transitiva  $\Phi : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de un grupo de Lie conexo y simplemente conexo  $G$  con álgebra de Lie real  $\mathfrak{g}$  en  $\mathbb{R}^n$  y determina una curva  $g(t)$  en  $G$  comenzando desde el elemento neutro,  $g(0) = e$ , y tal que

$$R_{g^{-1}(t)*g(t)} \dot{g}(t) = - \sum_{\alpha=1}^r b_\alpha(t) a_\alpha \equiv a(t) \quad (17)$$

donde  $\{a_1, \dots, a_r\}$  es una base of the Lie algebra  $\mathfrak{g}$ , entonces, la solución de las curvas integrales de  $X$  comenzando de  $x(0)$  está dada por

$$x(t) = \Phi(g(t), x(0)).$$

De esta manera, el problema de encontrar la solución general de (??) se reduce a determinar el problema de la mencionada curva en  $G$  solución de (17) comenzando desde el elemento neutro [3, 4, 2, 5].

A continuación se estudiará un par de ecuaciones diferenciales que se pueden interpretar como sistemas de Lie y en las que ambas ecuaciones vienen dadas por la misma ecuación en el álgebra del grupo  $G$ . La primera de ellas es la siguiente:

$$\ddot{r} = -\omega(t)r \quad (18)$$

la cual puede ser escrita como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{r} &= v_r \\ \dot{v}_r &= -\omega(t)r \end{cases}$$

Esta ecuación está asociada a un álgebra de Lie con álgebra  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . De hecho, el campo vectorial dinámico es

$$X = v_r \frac{\partial}{\partial r} - \omega(t)r \frac{\partial}{\partial v_r}.$$

y puede ser escrita como  $X = -\omega(t)M_1 + M_2$  con

$$M_1 = r \frac{\partial}{\partial v_r}, \quad M_2 = v_r \frac{\partial}{\partial r} \quad (19)$$

y si  $M_3$  es el campo vectorial definido por

$$M_3 = \frac{1}{2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} - v_r \frac{\partial}{\partial v_r} \right), \quad (20)$$

entonces  $M_1, M_2$  y  $M_3$  es la base de un álgebra de Lie real definida por las constantes de estructura

$$[M_1, M_2] = 2M_3, \quad [M_3, M_2] = -M_2, \quad [M_3, M_1] = M_1$$

del álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . La acción que estos inducen viene dada por:

$$\text{If } A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}), \quad \rho_2(A, \begin{pmatrix} v_r \\ r \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ r \end{pmatrix}$$

Also, we can consider the corresponding equation in  $SL(2, \mathbb{R})$ . The equation in the Lie group we obtain is given by:

$$R_{g^{-1}*} \dot{g} = \omega(t)a_1 - a_2 \quad (21)$$

Así mismo, la ecuación de Riccati:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega(t) \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial x} \quad (22)$$

donde escogemos los campos fundamentales:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad X_2 = -x \frac{\partial}{\partial x} \quad X_3 = -x^2 \frac{\partial}{\partial x} \quad (23)$$

está asociada a la misma ecuación en el grupo que la ecuación anterior, de esta manera, resolver una de ellas en  $G$  permite obtener la solución de ambas ecuaciones diferenciales.

## 4 Método de Wei-Norman

A continuación se describirá un método para resolver la ecuación (17) que es una generalización del propuesto por Wei and Norman [3, 6, 7] para encontrar la evolución temporal para sistemas lineales  $dU(t)/dt = H(t)U(t)$ , con  $U(0) = I$  (véase además [3, 8]). La prueba de este método se puede encontrar en [3, 4, 2, 5]. A continuación sólo se mostrará en que consiste el método.

La generalización del método de Wei-Norman consiste en escribir la solución  $g(t)$  of (17) en términos del segundo tipo de coordenadas canónicas de un grupo de Lie. Tomando una base  $\{a_1, \dots, a_r\}$  del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , para cada valor de  $t$ , p.e.

$$g(t) = \prod_{\alpha=1}^r \exp(-v_\alpha(t)a_\alpha) = \exp(-v_1(t)a_1) \cdots \exp(-v_r(t)a_r), \quad (24)$$

se puede transformar la ecuación (17) en un sistema de ecuaciones diferenciales para las funciones  $v_\alpha(t)$ . La curva  $g(t)$  que se busca es la dada por la solución del último sistema determinada por las condiciones iniciales  $v_\alpha(0) = 0$  para todo  $\alpha = 1, \dots, r$ . Ahora, se puede demostrar que usando la expresión (24) la ecuación (17) se transforma en la expresión siguiente [3, 5]:

$$\sum_{\alpha=1}^r \dot{v}_\alpha \left( \prod_{\beta < \alpha} \exp(-v_\beta(t) \text{ad}(a_\beta)) \right) a_\alpha = \sum_{\alpha=1}^r b_\alpha(t) a_\alpha, \quad (25)$$

con  $v_\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha = 1, \dots, r$ . La ecuación diferencial del sistema de funciones  $v_\alpha(t)$  es integrable por cuadraturas si el álgebra de Lie es soluble [3, 6, 7].

## 5 Método de Reducción en sistemas de Lie

El método de reducción para sistemas de Lie es un método que permite descomponer un sistema de Lie sobre un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  en dos sistemas de Lie con álgebras de Lie que pueden ser diferentes. Una de las ventajas de este método es que dependiendo de  $\mathfrak{g}$  permite resolver el problema inicial independientemente de los las funciones temporales que aparezcan, p.e. en caso de álgebras de Lie solubles el problema siempre tiene solución por cuadraturas. El enunciado exacto del método es el siguiente:

**Teorema 5.1.** *Cada solución  $g(t)$  de la ecuación en el grupo  $G$ :*

$$R_{g^{-1}(t)*g(t)} \dot{g}(t) = - \sum_{\alpha=1}^r b_\alpha(t) a_\alpha \quad (26)$$

se puede escribir en la forma  $g(t) = g_1(t)h(t)$ , donde  $g_1(t)$  es una curva en  $G$  que proyecta en una solución para el sistema de Lie dado por la acción de  $G$  por la izquierda en el espacio homogéneo  $G/H$  y  $h(t)$  es una solución para el subgrupo  $H$  de la ecuación:

$$R_{h^{-1}*h(t)} \dot{h}(t) = -\text{Ad}(g_1^{-1}(t)) \sum_{\alpha=1}^r b_\alpha(t) a_\alpha + \dot{g}_1(t) g_1^{-1}(t) \quad (27)$$

## 6 Aplicación en Mecánica Clásica de los sistemas de Lie.

A continuación se estudiará un problema de mecánica clásica en el que se aplicará todo lo comentado hasta ahora. El ejemplo estudiado es analizado en [3, ?]. Considerando como variedad de Poisson  $T^*\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  con el corchete definido de la forma habitual analicemos el hamiltoniano:

$$H_c = \frac{p^2}{2m} + f(t) x. \quad (28)$$

Las ecuaciones de Hamilton del problema vienen dadas por:

$$\frac{dx}{dt} = \{x, H\} \quad (29)$$

$$\frac{dp}{dt} = \{p, H\} \quad (30)$$

de donde en nuestro caso particular las ecuaciones son:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{p}{m}, \\ \dot{p} &= -f(t),\end{aligned}\tag{31}$$

y por lo tanto, el movimiento se puede obtener por dos cuadraturas:

$$x(t) = x_0 + \frac{p_0 t}{m} - \frac{1}{m} \int_0^t dt' \int_0^{t'} f(t'') dt'',\tag{32}$$

$$p(t) = p_0 - \int_0^t f(t') dt'\tag{33}$$

En el formalismo geométrico que hemos analizado, el campo vectorial  $t$ -dependiente que describe la evolución temporal viene dado por

$$X = \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} - f(t) \frac{\partial}{\partial p}$$

el cual puede ser escrito como una combinación lineal  $X = \frac{1}{m} X_1 - f(t) X_2$ , con

$$X_1 = p \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial p},$$

donde estos campos vectoriales cierran un álgebra de Lie finito dimensional de dimensión tres con  $X_3 = \partial/\partial x$  que es isomorfa al álgebra de Lie del grupo de Heisenberg:

$$[X_1, X_2] = -X_3, \quad [X_1, X_3] = 0, \quad [X_2, X_3] = 0.\tag{34}$$

Los flujos de estos campos vectoriales vienen dados por:

$$\begin{aligned}\phi_1(t, (x_0, p_0)) &= (x_0 + p_0 t, p_0), \\ \phi_2(t, (x_0, p_0)) &= (x_0, p_0 + t), \\ \phi_3(t, (x_0, p_0)) &= (x_0 + t, p_0).\end{aligned}$$

Así, esto se corresponde con la acción del grupo de Lie de matrices triangulares superiores  $3 \times 3$ , el grupo de Heisenberg, en  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{p} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tómese  $\{a_1, a_2, a_3\}$  una base del algebra de Lie con un corchete de Lie no nulo dado por  $[a_1, a_2] = -a_3$ . Entonces, la ecuación (17) en el grupo viene dado por:

$$R_{g^{-1}*g(t)}\dot{g} = -\frac{1}{m}a_1 + f(t)a_2.$$

Ahora, eligiendo la factorización:  $g = \exp(-u_3 a_3) \exp(-u_2 a_2) \exp(-u_1 a_1)$  y usando la fórmula de Wei-Norman (25) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{u}_1 = \frac{1}{m}, \quad \dot{u}_2 = -f(t), \quad \dot{u}_3 - \dot{u}_1 u_2 = 0,$$

junto con las condiciones iniciales:

$$u_1(0) = u_2(0) = u_3(0) = 0 ,$$

con solución

$$u_1 = \frac{t}{m} , \quad u_2 = - \int_0^t f(t') dt' , \quad u_3 = - \frac{1}{m} \int_0^t dt' \int_0^{t'} f(t'') dt'' .$$

Por lo tanto el movimiento viene dado por:

$$\begin{pmatrix} x \\ p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{m} & -\frac{1}{m} \int_0^t dt' \int_0^{t'} f(t'') dt'' \\ 0 & 1 & - \int_0^t f(t') dt' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

y reproduce (33). Además, invirtiendo la matriz obtenemos dos constantes del movimiento:

$$\begin{aligned} I_1 &= p(t) + \int_0^t f(t') dt' \\ I_2 &= x(t) - \frac{1}{m} \left( p(t) + \int_0^t f(t') dt' \right) t + \frac{1}{m} \int_0^t dt' \int_0^{t'} f(t'') dt'' \end{aligned}$$

la primera es la que se encuentra en [3, 9].

## 7 Ecuaciones de Schrödinger como sistemas de Lie

En Mecánica Cuántica el espacio separable de Hilbert,  $\mathcal{H}$ , puede ser visto como una variedad real infinito dimensional que admite una carta global [3, 10]. Por otro lado, el grupo de traslaciones permite dar lugar a una identificación entre el espacio tangente  $T_\phi \mathcal{H}$  en cualquier punto  $\phi \in \mathcal{H}$  con  $\mathcal{H}$ . Dicha identificación asocia  $\psi \in \mathcal{H}$  al vector  $\dot{\psi} \in T_\phi \mathcal{H}$  dado por:

$$\dot{\psi} f(\phi) := \left( \frac{d}{dt} f(\phi + t\psi) \right)_{|t=0} ,$$

para cualquier  $f \in C^\infty(\mathcal{H})$ .

A través de una identificación de  $\mathcal{H}$  con  $T_\phi \mathcal{H}$  en cualquier punto  $\phi \in \mathcal{H}$  un campo vectorial continuo no es mas que una aplicación continua  $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . En particular, un operador lineal  $A$  en  $\mathcal{H}$  es un tipo especial de campo vectorial (constante). Habitualmente los operadores en mecánica cuántica no son ni continuos ni están definidos sobre todo el espacio  $\mathcal{H}$ . Sin embargo, lo siguiente puede seguir aplicandose de forma general y no se entrará en más detalles aquí sobre el tema.

El caso más relevante es cuando  $A$  es un operador lineal antihermítico  $A = -iH$ . No se entrará a discutir porqué, pero  $\mathcal{H}$  puede ser dotado con una estructura natural de variedad simpléctica, y entonces, tales operadores antihermíticos están caracterizados por ser campo vectoriales constantes hamiltonianos. Las curvas integrales de un tal campo vectorial hamiltoniano  $A = -iH$  son las soluciones de la correspondiente ecuación de Schrödinger [3, 10]. Incluso cuando  $A$  es

no acotado, se puede demostrar que si  $A$  es antihermítico debe de estar definido en un denso y sus curvas integrales son continuas y definidas en todo  $\mathcal{H}$ .

Por otro lado, los operadores antihermíticos considerados como campos vectoriales son campos vectoriales fundamentales relativos a la acción usual del grupo unitario  $U(\mathcal{H})$  en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Ahora, la teoría de sistemas de Lie se aplica al caso en el que un hamiltoniano  $t$ -dependiente puede ser escrito como una combinación lineal con coeficientes dependientes del tiempo de algunos operadores antihermíticos, los hamiltonianos  $-iH_\alpha$ , cerrando, bajo el conmutador, una álgebra de Lie finito dimensional. Es decir:

$$H(t) = \sum_{\alpha=0}^r b_\alpha(t)H_\alpha \quad (35)$$

donde los hamiltonianos independientes del tiempo  $-iH_\alpha$  satisfacen

$$[-iH_\alpha, -iH_\beta] = -i c_{\alpha\beta}^\gamma H_\gamma, \quad (36)$$

con  $c_{\alpha\beta}^\gamma$  constantes reales.

Cuando esto sucede, se puede asociar al álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  actuando sobre  $\mathcal{H}$  por operadores antihermíticos de tal manera que existe una base  $\{a_\alpha\}$  de  $\mathfrak{g}$  con  $-iH_\alpha$  los campos fundamentales asociados con  $a_\alpha$ .

La aplicación lineal  $X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{H})$ ,  $X : a_\alpha \mapsto -iH_\alpha$  es un isomorfismo de álgebras de Lie. Entonces, cuando  $H(t)$  está dado por (35), la ecuación de Schrödinger

$$\frac{d\psi}{dt} = -iH(t)\psi \quad (37)$$

puede ser reducida a una ecuación en  $G$  como (17) determinada por la curva en

$\mathfrak{g}$  dada por  $a(t) = \sum_{\alpha=0}^r b_\alpha(t)a_\alpha$ . Una vez que la ecuación (17) con condición inicial

$g(0) = e$  ha sido resuelto se puede obtener soluciones generales de la ecuación de Schrödinger. El punto a hacer notar, sin embargo, es que esta álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  no necesariamente coincide con el álgebra de Lie correspondiente al caso clásico (si es que existe un sistema clásico), pero es una extensión del álgebra de Lie. Más explícitamente, esta álgebra de Lie es exactamente la misma que el álgebra de Lie de las funciones hamiltonianas del sistema clásico relacionado bajo los corchetes de Poisson.

Por último citar un ejemplo de mecánica cuántica que tiene analogía con la teoría de control [11]:

$$H = -2A \sum_{i,j} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j + \mathbf{B}(t) \cdot \sum_i \hat{\mathbf{S}}_i$$

en este ejemplo el método desarrollado aquí permite obtener soluciones exactas cuando  $\mathbf{B}(t)$  es un vector tridimensional de la forma

$$\mathbf{B}(t) = (B \sin \theta \cos(\omega t), B \sin \theta \sin(\omega t), B \cos(\theta)).$$

el problema en el grupo es un problema clásico en teoría de control del tipo que se puede encontrar en [12] en el que uno está interesado en variar la forma de las  $B(t)$  para conseguir un movimiento del sistema cuántico de un estado inicial a otro fijo final. Este problema es muy interesante desde el punto de vista cuántico y constituye una aplicación interesante de la teoría de control.

## References

- [1] S. Lie, *Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen mit Geometrischen und anderen Anwendungen*, Edited and revised by G. Scheffers, Teubner, Leipzig, 1893.
- [2] J.F. Cariñena, J. Grabowski and A. Ramos, *Reduction of time-dependent systems admitting a superposition principle*, Acta Appl. Math. **66**, 67–87 (2001).
- [3] B. Hamprecht, *Exact solutions of the time-dependent Schrödinger equation in one space dimension*, Phys. Rev. **A 64**, 053408 (2001).
- [4] J.F. Cariñena, J. Grabowski and G. Marmo, *Lie–Scheffers systems: a geometric approach*, Bibliopolis, Napoli, 2000.
- [5] J.F. Cariñena and A. Ramos, *A new geometric approach to Lie systems and physical applications*, Acta Appl. Math. **70**, 43–69 (2002).
- [6] J. Wei and E. Norman, *Lie algebraic solution of linear differential equations*, J. Math. Phys. **4**, 575–81 (1963).
- [7] J. Wei and E. Norman, *On global representations of the solutions of linear differential equations as a product of exponentials*, Proc. Amer. Math. Soc. **15**, 327–34 (1964).
- [8] J.F. Cariñena, G. Marmo and J. Nasarre, *The nonlinear superposition principle and the Wei–Norman method*, Int. J. Mod. Phys. **A 13**, 3601–27 (1998).
- [9] I. Guedes, *Solution of the Schrödinger equation from the time-dependent linear potencial*, Phys. Rev. **A 63**, 034102 (2001).
- [10] L.J. Boya, J.F. Cariñena y J.M. Gracia-Bondía, *Symplectic structure of the Aharonov-Anandan geometric phase*, Phys. Lett. **161 A**, 30–4 (1991).
- [11] F. Yan, L. Yang y B. Li, *Formal exact solution for the Heisenberg spin system in a time dependent magnetic field and Aharonov-Anandan phase*, Phys. Lett. **A 251**, 289–293 (1999).
- [12] J. F. Cariñena y A. Ramos, *Applications of Lie systems in Quantum Mechanics and Control Theory*, arXiv: math-ph //030521