

DINÁMICA EN AFGEBROIDES DE LIE

DIANA SOSA

II ENCUENTRO DE JÓVENES INVESTIGADORES
EN GEOMETRÍA, MECÁNICA Y CONTROL

1. AFGEBROIDES DE LIE. EJEMPLOS

1.1. Afgebroides de Lie. Sea $\tau_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow Q$ un fibrado afín con fibrado vectorial asociado $\tau_V : V \rightarrow Q$. Denotaremos por $\tau_{\mathcal{A}^+} : \mathcal{A}^+ = \text{Aff}(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \rightarrow Q$ el fibrado dual afín cuya fibra en un punto $x \in Q$ consiste de las funciones afines en la fibra \mathcal{A}_x . Nótese que este fibrado tiene una sección distinguida $1_{\mathcal{A}} \in \Gamma(\tau_{\mathcal{A}^+})$ inducida por la función constante 1 sobre \mathcal{A} . Consideramos también el fibrado bidual $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow Q$ cuya fibra en un punto $x \in Q$ es el espacio vectorial $\tilde{\mathcal{A}}_x = (\mathcal{A}_x^+)^*$. Entonces, \mathcal{A} puede identificarse con un subfibrado afín de $\tilde{\mathcal{A}}$ de corango 1 mediante la inclusión $i_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ dada por $i_{\mathcal{A}}(a)(\varphi) = \varphi(a)$, la cual es una aplicación afín e inyectiva cuya aplicación lineal asociada denotaremos por $i_V : V \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$. Así, V puede identificarse con un subfibrado vectorial de $\tilde{\mathcal{A}}$ de corango 1. Usando estos hechos, se puede probar que existe una correspondencia biyectiva entre las funciones afines sobre \mathcal{A} y las funciones lineales sobre $\tilde{\mathcal{A}}$. Por otra parte, está claro que existe una correspondencia biyectiva entre las funciones afines sobre \mathcal{A} y las secciones de \mathcal{A}^+ .

Definición 1. Una estructura de afgebroides de Lie $([\cdot, \cdot]_V, D, \rho_{\mathcal{A}})$ sobre un fibrado afín $\tau_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow Q$ consiste de una estructura de álgebra de Lie $[\cdot, \cdot]_V$ sobre el espacio $\Gamma(\tau_V)$ de las secciones de $\tau_V : V \rightarrow Q$, una acción \mathbb{R} -lineal $D : \Gamma(\tau_{\mathcal{A}}) \times \Gamma(\tau_V) \rightarrow \Gamma(\tau_V)$ de las secciones de \mathcal{A} sobre $\Gamma(\tau_V)$ y una aplicación afín $\rho_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow TQ$, denominada la aplicación ancla, satisfaciendo las siguientes condiciones:

- $D_X[\bar{Y}, \bar{Z}]_V = [D_X\bar{Y}, \bar{Z}]_V + [\bar{Y}, D_X\bar{Z}]_V$,
- $D_{X+\bar{Y}}\bar{Z} = D_X\bar{Z} + [\bar{Y}, \bar{Z}]_V$,
- $D_X(f\bar{Y}) = fD_X\bar{Y} + \rho_{\mathcal{A}}(X)(f)\bar{Y}$,

para $X \in \Gamma(\tau_{\mathcal{A}})$, $\bar{Y}, \bar{Z} \in \Gamma(\tau_V)$ y $f \in C^\infty(Q, \mathbb{R})$. La terna $(\mathcal{A}, V, ([\cdot, \cdot]_V, D, \rho_{\mathcal{A}}))$ se denomina afgebroides de Lie sobre Q (véase [1, 4]).

Observación 1. Si $([\cdot, \cdot]_V, D, \rho_{\mathcal{A}})$ es una estructura de afgebroides de Lie sobre un fibrado afín \mathcal{A} entonces $(V, [\cdot, \cdot]_V, \rho_V)$ es un algebroides de Lie, donde $\rho_V : V \rightarrow TQ$ es la aplicación lineal asociada a la aplicación afín $\rho_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow TQ$. \diamond

Una estructura de afgebroides de Lie sobre un fibrado afín $\tau_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow Q$ induce una estructura de algebroides de Lie $([\cdot, \cdot]_{\tilde{\mathcal{A}}}, \rho_{\tilde{\mathcal{A}}})$ sobre el fibrado bidual $\tilde{\mathcal{A}}$ tal que la sección $1_{\mathcal{A}} \in \Gamma(\tau_{\mathcal{A}^+})$ es un 1-cociclo en la correspondiente cohomología, es decir, $d^{\tilde{\mathcal{A}}}1_{\mathcal{A}} = 0$. De hecho, si $X_0 \in \Gamma(\tau_{\mathcal{A}})$

entonces para toda sección \tilde{X} de $\tilde{\mathcal{A}}$ existen una función $f \in C^\infty(Q, \mathbb{R})$ y una sección $\bar{X} \in \Gamma(\tau_V)$ tales que $\tilde{X} = fX_0 + \bar{X}$ y

$$(1) \quad \begin{aligned} \llbracket fX_0 + \bar{X}, gX_0 + \bar{Y} \rrbracket_{\tilde{\mathcal{A}}} &= (\rho_V(\bar{X})(g) - \rho_V(\bar{Y})(f) + f\rho_{\mathcal{A}}(X_0)(g) \\ &\quad - g\rho_{\mathcal{A}}(X_0)(f))X_0 + \llbracket \bar{X}, \bar{Y} \rrbracket_V + fD_{X_0}\bar{Y} - gD_{X_0}\bar{X}, \\ \rho_{\tilde{\mathcal{A}}}(fX_0 + \bar{X}) &= f\rho_{\mathcal{A}}(X_0) + \rho_V(\bar{X}). \end{aligned}$$

Recíprocamente, sea $(U, \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_U, \rho_U)$ un algebroide de Lie sobre Q y $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ un 1-cociclo de $(U, \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_U, \rho_U)$ tal que $\phi|_{U_x} \neq 0$, para todo $x \in Q$. Entonces, $\mathcal{A} = \phi^{-1}\{1\}$ es un fibrado afín sobre Q que admite una estructura de algebroide de Lie de tal forma que $(U, \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_U, \rho_U)$ puede identificarse con el algebroide de Lie bidual $(\tilde{\mathcal{A}}, \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_{\tilde{\mathcal{A}}}, \rho_{\tilde{\mathcal{A}}})$ de \mathcal{A} y, bajo dicha identificación, el 1-cociclo $1_{\mathcal{A}} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R}$ es justamente ϕ . Además, el fibrado afín $\tau_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow Q$ está modelado sobre el fibrado vectorial $\tau_V : V = \phi^{-1}\{0\} \rightarrow Q$. De hecho, si $i_V : V \rightarrow U$ y $i_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow U$ son las inclusiones canónicas, entonces

$$(2) \quad \begin{aligned} i_V \circ \llbracket \bar{X}, \bar{Y} \rrbracket_V &= \llbracket i_V \circ \bar{X}, i_V \circ \bar{Y} \rrbracket_U, \\ i_V \circ D_X \bar{Y} &= \llbracket i_{\mathcal{A}} \circ X, i_V \circ \bar{Y} \rrbracket_U, \\ \rho_{\mathcal{A}}(X) &= \rho_U(i_{\mathcal{A}} \circ X), \end{aligned}$$

para $\bar{X}, \bar{Y} \in \Gamma(\tau_V)$ y $X \in \Gamma(\tau_{\mathcal{A}})$.

Sea $\tau_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow Q$ un algebroide de Lie modelado sobre el algebroide de Lie $\tau_V : V \rightarrow Q$. Supongamos que (x^i) son coordenadas locales en un subconjunto abierto U de Q y que $\{e_0, e_\alpha\}$ es una base local de secciones de $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow Q$ en U que está *adaptada* al 1-cociclo $1_{\mathcal{A}}$, esto es, tal que

$$(3) \quad 1_{\mathcal{A}}(e_0) = 1 \text{ y } 1_{\mathcal{A}}(e_\alpha) = 0, \text{ para todo } \alpha.$$

Nótese que si $\{e^0, e^\alpha\}$ es la base dual de $\{e_0, e_\alpha\}$ entonces $e^0 = 1_{\mathcal{A}}$. Así, usando que $1_{\mathcal{A}}$ es un 1-cociclo, tenemos que las correspondientes funciones de estructura locales del algebroide de Lie bidual $\tilde{\mathcal{A}}$ son las siguientes

$$(4) \quad \begin{aligned} \llbracket e_0, e_\alpha \rrbracket_{\tilde{\mathcal{A}}} &= C_{0\alpha}^\gamma e_\gamma, & \llbracket e_\alpha, e_\beta \rrbracket_{\tilde{\mathcal{A}}} &= C_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma, \\ \rho_{\tilde{\mathcal{A}}}(e_0) &= \rho_0^i \frac{\partial}{\partial x^i}, & \rho_{\tilde{\mathcal{A}}}(e_\alpha) &= \rho_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Denotaremos por (x^i, y^0, y^α) las correspondientes coordenadas locales sobre $\tilde{\mathcal{A}}$. Así, la ecuación local que define a \mathcal{A} (respectivamente, V) como subfibrado afín (respectivamente, vectorial) de $\tilde{\mathcal{A}}$ es $y^0 = 1$ (respectivamente, $y^0 = 0$). Por lo tanto, (x^i, y^α) pueden considerarse como coordenadas locales en \mathcal{A} y en V .

1.2. Morfismos de algebroides de Lie. Ahora, sea $\tau_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow Q$ (respectivamente, $\tau_{\mathcal{A}'} : \mathcal{A}' \rightarrow Q'$) un fibrado afín con fibrado vectorial asociado $\tau_V : V \rightarrow Q$ (respectivamente, $\tau_{V'} : V' \rightarrow Q'$) y sea $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ un morfismo de fibrados afines sobre la aplicación $f : Q \rightarrow Q'$ con morfismo lineal asociado (F^l, f) entre los fibrados vectoriales $\tau_V : V \rightarrow Q$ y $\tau_{V'} : V' \rightarrow Q'$. Tenemos así los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{A}' \\
\tau_{\mathcal{A}} \downarrow & & \downarrow \tau_{\mathcal{A}'} \\
Q & \xrightarrow{f} & Q'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{F^l} & V' \\
\tau_V \downarrow & & \downarrow \tau_{V'} \\
Q & \xrightarrow{f} & Q'
\end{array}$$

Un cálculo directo prueba que la aplicación $\tilde{F} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}'$ definida por

$$(5) \quad \tilde{F}(\tilde{a})(\varphi') = \tilde{a}(\varphi' \circ F|_{\mathcal{A}_x}),$$

para $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}_x$ y $\varphi' \in (\mathcal{A}')^+_{f(x)}$, con $x \in Q$, define un morfismo entre los fibrados vectoriales $\tilde{\mathcal{A}}$ y $\tilde{\mathcal{A}}'$ sobre f y, además,

$$(\tilde{F}, f)^* 1_{\mathcal{A}'} = 1_{\mathcal{A}}.$$

Recíprocamente, supongamos que $\tau_U : U \rightarrow Q$ y $\tau_{U'} : U' \rightarrow Q'$ son fibrados vectoriales y que ϕ y ϕ' son secciones de los fibrados vectoriales $\tau_U^* : U^* \rightarrow Q$ y $\tau_{U'}^* : (U')^* \rightarrow Q'$ tales que $\phi(x) \neq 0$, para todo $x \in Q$, y $\phi'(x') \neq 0$, para todo $x' \in Q'$. Supongamos también que el par (\tilde{F}, f) es un morfismo entre los fibrados vectoriales $\tau_U : U \rightarrow Q$ y $\tau_{U'} : U' \rightarrow Q'$ tal que $(\tilde{F}, f)^* \phi' = \phi$ y denotemos por \mathcal{A} y V (respectivamente, \mathcal{A}' y V') los subconjuntos de U (respectivamente, U') definidos por $\mathcal{A} = \phi^{-1}\{1\}$ y $V = \phi^{-1}\{0\}$ (respectivamente, $\mathcal{A}' = (\phi')^{-1}\{1\}$ y $V' = (\phi')^{-1}\{0\}$). Entonces, es sencillo probar que $\tilde{F}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}'$ y $\tilde{F}(V) \subseteq V'$. Así, el par (F, f) es un morfismo entre los fibrados afines $\tau_{\mathcal{A}} = (\tau_U)|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow Q$ y $\tau_{\mathcal{A}'} = (\tau_{U'})|_{\mathcal{A}'} : \mathcal{A}' \rightarrow Q'$, donde $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ es la restricción de \tilde{F} a \mathcal{A} . Además, el correspondiente morfismo entre los fibrados vectoriales $\tau_V = (\tau_U)|_V : V \rightarrow Q$ y $\tau_{V'} = (\tau_{U'})|_{V'} : V' \rightarrow Q'$ es el par (F^l, f) , siendo $F^l : V \rightarrow V'$ la restricción de \tilde{F} a V .

Definición 2. Sean $(\tau_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow Q, \tau_V : V \rightarrow Q, ([\cdot, \cdot]_V, D, \rho_{\mathcal{A}}))$ y $(\tau_{\mathcal{A}'} : \mathcal{A}' \rightarrow Q', \tau_{V'} : V' \rightarrow Q', ([\cdot, \cdot]_{V'}, D', \rho_{\mathcal{A}'}))$ dos afgebroides de Lie y $((F, f), (F^l, f))$ un morfismo entre los fibrados afines $(\tau_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow Q, \tau_V : V \rightarrow Q)$ y $(\tau_{\mathcal{A}'} : \mathcal{A}' \rightarrow Q', \tau_{V'} : V' \rightarrow Q')$. Entonces, el par $((F, f), (F^l, f))$ se dice que es un morfismo de afgebroides de Lie si:

- (i) El par (F^l, f) es un morfismo entre los afgebroides de Lie $(V, [\cdot, \cdot]_V, \rho_V)$ y $(V', [\cdot, \cdot]_{V'}, \rho_{V'})$,
- (ii) $Tf \circ \rho_{\mathcal{A}} = \rho_{\mathcal{A}'} \circ F$ y
- (iii) Si X (respectivamente, X') es una sección de $\tau_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow Q$ (respectivamente, $\tau_{\mathcal{A}'} : \mathcal{A}' \rightarrow Q'$) y \bar{Y} (respectivamente, \bar{Y}') es una sección de $\tau_V : V \rightarrow Q$ (respectivamente, $\tau_{V'} : V' \rightarrow Q'$) tales que $X' \circ f = F \circ X$ y $\bar{Y}' \circ f = F^l \circ \bar{Y}$ entonces $F^l \circ D_X \bar{Y} = (D'_{X'} \bar{Y}') \circ f$.

Ahora, usando (1), se deduce el siguiente resultado.

Proposición 1. Sean $(\tau_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow Q, \tau_V : V \rightarrow Q, ([\cdot, \cdot]_V, D, \rho_{\mathcal{A}}))$ y $(\tau_{\mathcal{A}'} : \mathcal{A}' \rightarrow Q', \tau_{V'} : V' \rightarrow Q', ([\cdot, \cdot]_{V'}, D', \rho_{\mathcal{A}'}))$ dos afgebroides de Lie. Si $((F, f), (F^l, f))$ es un morfismo de afgebroides de Lie y $\tilde{F} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}'$ es el correspondiente morfismo entre los fibrados vectoriales biduals $\tilde{\mathcal{A}}$

y $\widetilde{\mathcal{A}'}$, definido como en (5), entonces el par (\widetilde{F}, f) es un morfismo entre los algebroides de Lie $(\widetilde{\mathcal{A}}, [\cdot, \cdot]_{\widetilde{\mathcal{A}}}, \rho_{\widetilde{\mathcal{A}}})$ y $(\widetilde{\mathcal{A}'}, [\cdot, \cdot]_{\widetilde{\mathcal{A}'}} , \rho_{\widetilde{\mathcal{A}'}})$.

Finalmente, usando (2), puede probarse el siguiente resultado.

Proposición 2. Sean $\tau_U : U \rightarrow Q$ y $\tau_{U'} : U' \rightarrow Q'$ dos algebroides de Lie y $\phi \in \Gamma(\tau_U^*)$ y $\phi' \in \Gamma(\tau_{U'}^*)$ dos 1-cociclos de $\tau_U : U \rightarrow Q$ y $\tau_{U'} : U' \rightarrow Q'$, respectivamente, tales que $\phi(x) \neq 0$, para todo $x \in Q$, y $\phi'(x') \neq 0$, para todo $x' \in Q'$. Entonces, si el par (\widetilde{F}, f) es un morfismo de algebroides de Lie entre los algebroides de Lie $\tau_U : U \rightarrow Q$ y $\tau_{U'} : U' \rightarrow Q'$ satisfaciendo que $(\widetilde{F}, f)^* \phi' = \phi$, tenemos que el correspondiente morfismo $((F, f), (F', f))$ entre los afgebroides de Lie $(\tau_{\mathcal{A}} = (\tau_U)|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} = \phi^{-1}\{1\} \rightarrow Q, \tau_V = (\tau_U)|_V : V = \phi^{-1}\{0\} \rightarrow Q)$ y $(\tau_{\mathcal{A}'} = (\tau_{U'})|_{\mathcal{A}'} : \mathcal{A}' = (\phi')^{-1}\{1\} \rightarrow Q', \tau_{V'} = (\tau_{U'})|_{V'} : V' = (\phi')^{-1}\{0\} \rightarrow Q')$ es un morfismo de afgebroides de Lie.

1.3. Ejemplos de afgebroides de Lie. En esta sección mostraremos algunos fibrados afines sobre los cuales es posible definir una estructura de afgebroides de Lie.

1.-Algebroides de Lie. Sea $(E, [\cdot, \cdot]_E, \rho_E)$ un algebroides de Lie de rango n sobre una variedad Q de dimensión m y denotemos por $\tau_E : E \rightarrow Q$ la proyección fibrada. En este caso, $\tau_{\mathcal{A}} = \tau_E : \mathcal{A} = E \rightarrow Q$ puede considerarse como un fibrado afín con fibrado vectorial asociado $\tau_V = \tau_E : V = E \rightarrow Q$. Entonces, su fibrado dual $\tau_{\mathcal{A}^+} : \mathcal{A}^+ \rightarrow Q$ puede identificarse con el fibrado vectorial $\tilde{\tau}_E^* : E^* \times \mathbb{R} \rightarrow Q$ y, por tanto, su fibrado bidual $\tau_{\widetilde{\mathcal{A}}} : \widetilde{\mathcal{A}} \rightarrow Q$ es justamente $\tilde{\tau}_E : E \times \mathbb{R} \rightarrow Q$. Bajo estas identificaciones, la sección distinguida $1_E \in \Gamma(\tau_{\mathcal{A}^+}) \cong \Gamma(\tau_E^*) \times C^\infty(Q, \mathbb{R})$ es la sección $(0, 1) \in \Gamma(\tau_E^*) \times C^\infty(Q, \mathbb{R})$ inducida por la función constante 1 sobre Q .

Nótese que el fibrado vectorial $\tau_{\widetilde{\mathcal{A}}} \cong \tilde{\tau}_E : \widetilde{\mathcal{A}} \cong E \times \mathbb{R} \rightarrow Q$ admite una estructura de algebroides de Lie $([\cdot, \cdot]_{E \times \mathbb{R}}, \rho_{E \times \mathbb{R}})$ definida como sigue

$$(6) \quad \begin{aligned} \llbracket (X, f), (Y, g) \rrbracket_{E \times \mathbb{R}} &= (\llbracket X, Y \rrbracket_E, \rho_E(X)(g) - \rho_E(Y)(f)), \\ \rho_{E \times \mathbb{R}}(X, f) &= \rho_E(X), \end{aligned}$$

para $(X, f), (Y, g) \in \Gamma(\tau_E) \times C^\infty(Q, \mathbb{R}) \cong \Gamma(\tilde{\tau}_E)$. Además, es claro que la sección $(0, 1) \in \Gamma(\tau_E^*) \times C^\infty(Q, \mathbb{R}) \cong \Gamma(\tilde{\tau}_E^*)$ es un 1-cociclo para el algebroides de Lie $\tau_{\widetilde{\mathcal{A}}} \cong \tilde{\tau}_E : \widetilde{\mathcal{A}} \cong E \times \mathbb{R} \rightarrow Q$. Así, tenemos inducida una estructura de afgebroides de Lie $([\cdot, \cdot]_V, D, \rho_{\mathcal{A}})$ sobre el fibrado afín $\tau_{\mathcal{A}} = \tau_E : \mathcal{A} = E \rightarrow Q$ dada por

$$\begin{aligned} \llbracket X, Y \rrbracket_V &= \llbracket X, Y \rrbracket_E, \quad \text{para } X, Y \in \Gamma(\tau_V) = \Gamma(\tau_E), \\ D_X Y &= \llbracket X, Y \rrbracket_E, \quad \text{para } X \in \Gamma(\tau_{\mathcal{A}}) = \Gamma(\tau_E) \text{ y } Y \in \Gamma(\tau_V) = \Gamma(\tau_E), \\ \rho_{\mathcal{A}}(X) &= \rho_E(X), \quad \text{para } X \in \Gamma(\tau_{\mathcal{A}}) = \Gamma(\tau_E). \end{aligned}$$

Por otra parte, una base local $\{e_0, e_\alpha\}$ de secciones de $\widetilde{\mathcal{A}} \cong E \times \mathbb{R}$ adaptada al 1-cociclo $1_E = (0, 1)$ puede construirse como sigue

$$\begin{aligned} e_0 &= (0, 1) \in \Gamma(\tilde{\tau}_E) = \Gamma(\tau_E) \times C^\infty(Q, \mathbb{R}), \\ e_\alpha &= (e'_\alpha, 0) \in \Gamma(\tilde{\tau}_E) = \Gamma(\tau_E) \times C^\infty(Q, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

donde $\{e'_\alpha\}$ es una base local de secciones de E .

Ahora, supongamos que (x^i) son coordenadas locales en un subconjunto abierto U de Q . Denotaremos por (x^i, y^α, y^0) las correspondientes coordenadas locales sobre $\tilde{\mathcal{A}} \cong E \times \mathbb{R}$ inducidas por $\{e_0, e_\alpha\}$. La ecuación local que define a E como subfibrado afín (respectivamente, como subfibrado vectorial) de $E \times \mathbb{R}$ es $y^0 = 1$ (respectivamente, $y^0 = 0$). Así, (x^i, y^α) pueden considerarse como coordenadas locales en E .

En este caso, las expresiones locales del corchete de Lie y la aplicación ancla sobre $\tilde{\mathcal{A}} \cong E \times \mathbb{R}$ son las siguientes:

$$(7) \quad \begin{aligned} \llbracket e_0, e_\alpha \rrbracket_{E \times \mathbb{R}} &= 0, & \llbracket e_\alpha, e_\beta \rrbracket_{E \times \mathbb{R}} &= C_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma, \\ \rho_{E \times \mathbb{R}}(e_0) &= 0, & \rho_{E \times \mathbb{R}}(e_\alpha) &= \rho_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \end{aligned}$$

siendo $C_{\alpha\beta}^\gamma$ y ρ_α^i las funciones locales de estructura del algebroide de Lie E con respecto a las coordenadas (x^i) y la base local de secciones $\{e'_\alpha\}$.

2.-El fibrado de 1-jets de secciones locales de una fibración. Sea $\tau : Q \rightarrow \mathbb{R}$ una fibración y $\tau_{1,0} : J^1\tau \rightarrow Q$ el fibrado de 1-jets de secciones locales de $\tau : Q \rightarrow \mathbb{R}$. Es bien conocido que $\tau_{1,0} : J^1\tau \rightarrow Q$ es un fibrado afín modelado sobre el fibrado vectorial $\pi = (\pi_Q)|_{V\tau} : V\tau \rightarrow Q$, donde $\pi_Q : TQ \rightarrow Q$ es la proyección canónica y $V\tau$ es el fibrado vertical de $\tau : Q \rightarrow \mathbb{R}$. Además, si t es la coordenada usual en \mathbb{R} y η es la 1-forma cerrada sobre Q dada por $\eta = \tau^*(dt)$, entonces tenemos la siguiente identificación

$$J^1\tau \cong \{v \in TQ \mid \eta(v) = 1\}$$

(véase, por ejemplo, [5]). Nótese que $V\tau = \{v \in TQ \mid \eta(v) = 0\}$. Así, el fibrado bidual $\widetilde{J^1\tau}$ del fibrado afín $\tau_{1,0} : J^1\tau \rightarrow Q$ puede identificarse con el fibrado tangente TQ a Q y, bajo esta identificación, la sección $1_{J^1\tau}$ es la 1-forma η . Así, el fibrado dual $\widetilde{J^1\tau}$ es un algebroide de Lie y la sección $1_{J^1\tau}$ es un 1-cociclo para dicho algebroide de Lie. En consecuencia, el fibrado afín $\tau_{1,0} : J^1\tau \rightarrow Q$ admite una estructura de afgebroide de Lie.

3.-Álgebras de Lie. Sea \mathcal{A} un espacio afín modelado sobre el espacio vectorial V . Una *estructura de álgebra de Lie* $([\cdot, \cdot]_V, D)$ sobre el espacio afín \mathcal{A} consiste de una estructura de álgebra de Lie $[\cdot, \cdot]_V$ sobre V y una acción lineal por derivación de \mathcal{A} en V . En otras palabras,

$$D : \mathcal{A} \times V \rightarrow V, \quad (a, v) \mapsto D_a v,$$

es una aplicación tal que $D_a : V \rightarrow V$ es lineal, para todo $a \in \mathcal{A}$, y

- $D_a[v, w]_V = [D_a v, w]_V + [v, D_a w]_V$,
- $D_{a+v} w = D_a v + [v, w]_V$,

para $a \in \mathcal{A}$ y $v, w \in V$.

Está claro entonces que toda álgebra de Lie \mathcal{A} es un afgebroide de Lie sobre un punto. Así, el espacio bidual $\widetilde{\mathcal{A}}$ de cualquier álgebra de Lie es un álgebra de Lie.

Álgebras de Lie fueron consideradas en [1].

4.-Afgebroide de Lie-Atiyah. Sea $p : Q \rightarrow M$ un fibrado principal con grupo estructural G . Denotamos por $\Phi : G \times Q \rightarrow Q$ la acción libre de G sobre Q y por $T\Phi : G \times TQ \rightarrow TQ$ la acción tangente de G sobre TQ . Como es bien conocido, el fibrado vectorial cociente $\pi_Q|_G :$

$TQ/G \rightarrow M = Q/G$ es un algebroid de Lie que se denomina algebroid de Lie-Atiyah asociado al fibrado principal $p : Q \rightarrow M$.

Ahora, supongamos que $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una fibración de M sobre \mathbb{R} . Denotamos por $\tau : Q \rightarrow \mathbb{R}$ la composición $\tau = \nu \circ p$. Entonces, Φ induce una acción $J^1\Phi : G \times J^1\tau \rightarrow J^1\tau$ de G sobre $J^1\tau$ tal que

$$J^1\Phi(g, j_t^1\gamma) = j_t^1(\Phi_g \circ \gamma),$$

para $g \in G$ y $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q$ una sección local de τ , con $t \in I$. Además, la proyección

$$\tau_{1,0}|G : J^1\tau/G \rightarrow M, \quad [j_t^1\gamma] \mapsto p(\tau_{1,0}(j_t^1\gamma)) = p(\gamma(t))$$

define un fibrado afín sobre M que está modelado sobre el fibrado vectorial cociente

$$\pi|G : V\tau/G \rightarrow M, \quad [u_q] \mapsto p(q), \quad \text{para } u_q \in V_q\tau,$$

siendo $\pi : V\tau \rightarrow Q$ el fibrado vertical de la fibración $\tau : Q \rightarrow \mathbb{R}$. Aquí, la acción de G sobre $V\tau$ es la restricción a $V\tau$ de la acción tangente $T\Phi$ de G sobre TQ .

Además, el fibrado bidual de $J^1\tau/G \rightarrow M$ se puede identificar con el fibrado vectorial $\pi_Q|G : TQ/G \rightarrow M$.

Por otra parte, si t es la coordenada usual en \mathbb{R} , la 1-forma $\tau^*(dt)$ es invariante bajo la acción de G y define un 1-cociclo no nulo $\phi : TQ/G \rightarrow \mathbb{R}$ sobre el algebroid de Lie de Atiyah TQ/G . Nótese que $\phi^{-1}\{1\} \cong J^1\tau/G$ y, por tanto, podemos considerar la correspondiente estructura de algebroid de Lie sobre $J^1\tau/G$. El fibrado afín $J^1\tau/G$ dotado con dicha estructura se denomina *el algebroid de Lie-Atiyah* asociado con el fibrado principal $p : Q \rightarrow M$ y la fibración $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}$ (véase [4]).

5.- Algebroid de Lie acción. Sea \mathcal{A} un espacio afín modelado sobre el espacio vectorial V de dimensión finita y supongamos que \mathcal{A} admite una estructura de álgebra de Lie. Una acción infinitesimal de \mathcal{A} sobre una variedad M es una aplicación afín $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ tal que la aplicación lineal $\Phi^l : V \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ asociada a Φ es una acción infinitesimal (estándar) de V sobre M y, además,

$$\Phi^l(D_a v) = [\Phi(a), \Phi^l(v)], \quad \text{para } a \in \mathcal{A} \text{ y } v \in V.$$

Ahora, consideramos el fibrado afín trivial $\text{pr}_1 : M \times \mathcal{A} \rightarrow M$. Está claro que el fibrado bidual de $\text{pr}_1 : M \times \mathcal{A} \rightarrow M$ es el fibrado vectorial trivial $\text{pr}_1 : M \times \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow M$, donde $\tilde{\mathcal{A}}$ es el espacio bidual de \mathcal{A} . Además, si $\tilde{\Phi} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ es la aplicación lineal inducida por Φ , se tiene que $\tilde{\Phi}$ es una acción infinitesimal del álgebra de Lie $\tilde{\mathcal{A}}$ sobre la variedad M . Así, el fibrado vectorial $\text{pr}_1 : M \times \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow M$ admite una estructura de algebroid de Lie acción.

Por otra parte, si $1_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{A}^+$ es la función (afín) constante e igual a 1 sobre \mathcal{A} , se sigue que $1_{\mathcal{A}}$ es un 1-cociclo del álgebra de Lie $\tilde{\mathcal{A}}$. Esto implica que la sección constante $1_{M \times \mathcal{A}}$ del fibrado vectorial $\text{pr}_1 : M \times \mathcal{A}^+ \rightarrow M$ dada por

$$1_{M \times \mathcal{A}}(x) = (x, 1_{\mathcal{A}}(x)), \quad \text{para todo } x \in M,$$

es un 1-cociclo del algebroid de Lie acción $\text{pr}_1 : M \times \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow M$.

Por tanto, el fibrado afín trivial $\text{pr}_1 : M \times \mathcal{A} \rightarrow M$ admite una estructura de algebroid de Lie. Al algebroid de Lie resultante se le denomina *algebroid de Lie acción* inducido por la acción infinitesimal $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$.

2. FORMALISMO LAGRANGIANO

En esta sección, desarrollaremos una descripción geométrica que nos permitirá escribir de forma intrínseca las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a una función Lagrangiana L sobre un afgebroides de Lie \mathcal{A} (véase [4]).

2.1. La prolongación $\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A}$. Sea $(\tau_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow Q, \tau_V : V \rightarrow Q, ([\cdot, \cdot]_V, D, \rho_{\mathcal{A}}))$ un afgebroides de Lie sobre una variedad Q . Entonces, el fibrado bidual $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow Q$ de \mathcal{A} admite una estructura de algebroides de Lie $([\cdot, \cdot]_{\tilde{\mathcal{A}}}, \rho_{\tilde{\mathcal{A}}})$ tal que la sección $1_{\mathcal{A}}$ del fibrado dual \mathcal{A}^+ es un 1-cociclo.

Ahora, consideramos la prolongación $(\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A}, [\cdot, \cdot]_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}}, \rho_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}})$ del algebroides de Lie $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow Q$ mediante la fibración $\tau_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow Q$. Denotaremos por $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}} : \mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ la proyección fibrada.

Supongamos que (x^i) son coordenadas locales en un subconjunto abierto U de Q y $\{e_0, e_{\alpha}\}$ es una base local de secciones del fibrado vectorial $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{-1}(U) \rightarrow U$ adaptada a $1_{\mathcal{A}}$ (véase (3)). Entonces $\{\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_{\alpha}, \mathcal{V}_{\alpha}\}$ es una base local de secciones del fibrado vectorial $(\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}})^{-1}(\tau_{\mathcal{A}}^{-1}(U)) \rightarrow \tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{-1}(U)$, donde

$$(8) \quad \begin{aligned} \mathcal{X}_0(\mathfrak{a}) &= \left(e_0(\tau_{\mathcal{A}}(\mathfrak{a})), \rho_0^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\mathfrak{a}} \right), & \mathcal{X}_{\alpha}(\mathfrak{a}) &= \left(e_{\alpha}(\tau_{\mathcal{A}}(\mathfrak{a})), \rho_{\alpha}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\mathfrak{a}} \right), \\ \mathcal{V}_{\alpha}(\mathfrak{a}) &= \left(0, \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} \Big|_{\mathfrak{a}} \right), \end{aligned}$$

para todo $\mathfrak{a} \in \tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{-1}(U)$. Aquí, (x^i, y^{α}) son las coordenadas locales sobre \mathcal{A} inducidas por las coordenadas locales (x^i) y la base $\{e_{\alpha}\}$ y $\rho_0^i, \rho_{\alpha}^i$ son las componentes de la aplicación ancla $\rho_{\tilde{\mathcal{A}}}$. Además, tenemos que

$$(9) \quad \begin{aligned} [\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_{\alpha}]_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}} &= C_{0\alpha}^{\gamma} \mathcal{X}_{\gamma}, & [\mathcal{X}_{\alpha}, \mathcal{X}_{\beta}]_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}} &= C_{\alpha\beta}^{\gamma} \mathcal{X}_{\gamma}, \\ [\mathcal{X}_0, \mathcal{V}_{\alpha}]_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}} &= [\mathcal{X}_{\alpha}, \mathcal{V}_{\beta}]_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}} = [\mathcal{V}_{\alpha}, \mathcal{V}_{\beta}]_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}} = 0, \\ \rho_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}}(\mathcal{X}_0) &= \rho_0^i \frac{\partial}{\partial x^i}, & \rho_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}}(\mathcal{X}_{\alpha}) &= \rho_{\alpha}^i \frac{\partial}{\partial x^i}, & \rho_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}}(\mathcal{V}_{\alpha}) &= \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}, \end{aligned}$$

donde $C_{0\beta}^{\gamma}$ y $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ son las funciones de estructura del corchete de Lie $[\cdot, \cdot]_{\tilde{\mathcal{A}}}$ con respecto a la base $\{e_0, e_{\alpha}\}$. Nótese que, si $\{\mathcal{X}^0, \mathcal{X}^{\alpha}, \mathcal{V}^{\alpha}\}$ es la base dual de $\{\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_{\alpha}, \mathcal{V}_{\alpha}\}$, entonces \mathcal{X}^0 está definida globalmente y es un 1-cociclo. Denotaremos por ϕ_0 al 1-cociclo \mathcal{X}^0 . Así, tenemos que

$$(10) \quad \phi_0(\mathfrak{a})(\tilde{\mathfrak{b}}, X_{\mathfrak{a}}) = 1_{\mathcal{A}}(\tilde{\mathfrak{b}}), \quad \text{para } (\tilde{\mathfrak{b}}, X_{\mathfrak{a}}) \in \mathcal{T}_{\mathfrak{a}}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A},$$

siendo $\mathcal{T}_{\mathfrak{a}}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A}$ la fibra de $\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ que contiene al punto \mathfrak{a} .

Se puede considerar también el endomorfismo vertical $S : \mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A}$ como una sección del fibrado vectorial $\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A} \otimes (\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A})^* \rightarrow \mathcal{A}$, cuya expresión local es (véase [4])

$$(11) \quad S = (\mathcal{X}^{\alpha} - y^{\alpha} \phi_0) \otimes \mathcal{V}_{\alpha}.$$

Una sección ξ de $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}} : \mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ se dice que es una *ecuación diferencial de segundo orden* (SODE) sobre \mathcal{A} si

$$\phi_0(\xi) = 1 \quad \text{y} \quad S\xi = 0.$$

Si $\xi \in \Gamma(\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}}})$ es una SODE entonces $\xi = \mathcal{X}_0 + y^\alpha \mathcal{X}_\alpha + \xi^\alpha \mathcal{V}_\alpha$, donde ξ^α son funciones locales sobre \mathcal{A} , y

$$\rho_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}}}(\xi) = (\rho_0^i + y^\alpha \rho_\alpha^i) \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}.$$

Ahora, una curva $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ en \mathcal{A} se dice que es *admisibile* si

$$\rho_{\tilde{\mathcal{A}}} \circ i_{\mathcal{A}} \circ \gamma = \widehat{(\tau_{\mathcal{A}} \circ \gamma)}$$

o, lo que es equivalente, si

$$(i_{\mathcal{A}}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)) \in \mathcal{T}_{\gamma(t)}^{\tilde{\mathcal{A}}} \mathcal{A}, \text{ para todo } t \in I,$$

siendo $i_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ la inclusión canónica. Denotaremos por $\text{Adm}(\mathcal{A})$ el espacio de curvas admisibles sobre \mathcal{A} . Así, si la expresión local de γ es $\gamma(t) = (x^i(t), y^\alpha(t))$, para todo $t \in I$, entonces γ es una curva admisible si y sólo si

$$\frac{dx^i}{dt} = \rho_0^i + \rho_\alpha^i y^\alpha, \text{ para } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Está claro que si ξ es una SODE las curvas integrales del campo de vectores $\rho_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}}}(\xi)$ son admisibles.

2.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange. Ahora, sea $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ una función Lagrangiana sobre \mathcal{A} . Entonces, introducimos la *1-sección de Poincaré-Cartan* $\Theta_L \in \Gamma((\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}}})^*)$ y la *2-sección de Poincaré-Cartan* $\Omega_L \in \Gamma(\wedge^2(\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}}})^*)$ asociadas a L definidas por

$$(12) \quad \Theta_L = L\phi_0 + (d^{T^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A}}L) \circ S, \quad \Omega_L = -d^{T^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A}}\Theta_L.$$

De (9), (11) y (12), obtenemos que

$$(13) \quad \begin{aligned} \Theta_L &= \left(L - y^\alpha \frac{\partial L}{\partial y^\alpha} \right) \phi_0 + \frac{\partial L}{\partial y^\alpha} \mathcal{X}^\alpha, \\ \Omega_L &= \left(i_{\xi_0} (d^{T^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A}} \left(\frac{\partial L}{\partial y^\alpha} \right)) - \frac{\partial L}{\partial y^\gamma} (C_{0\alpha}^\gamma + C_{\beta\alpha}^\gamma y^\beta) - \rho_\alpha^i \frac{\partial L}{\partial x^i} \right) \theta^\alpha \wedge \phi_0 \\ &\quad + \frac{\partial^2 L}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \theta^\alpha \wedge \psi^\beta + \frac{1}{2} \left(\rho_\beta^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial y^\alpha} - \rho_\alpha^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial y^\beta} + \frac{\partial L}{\partial y^\gamma} C_{\alpha\beta}^\gamma \right) \theta^\alpha \wedge \theta^\beta, \end{aligned}$$

donde $\theta^\alpha = \mathcal{X}^\alpha - y^\alpha \phi_0$, $\psi^\alpha = \mathcal{V}^\alpha - \xi_0^\alpha \phi_0$ y $\xi_0 = \mathcal{X}_0 + y^\alpha \mathcal{X}_\alpha + \xi_0^\alpha \mathcal{V}_\alpha$ es una SODE arbitraria. Ahora, una curva $\gamma : I = (-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ en \mathcal{A} es una *solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a L* si y sólo si

- γ es admisible, y
- $i_{(i_{\mathcal{A}}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t))} \Omega_L(\gamma(t)) = 0$, para todo t .

Localmente, si $\gamma(t) = (x^i(t), y^\alpha(t))$, entonces γ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange para L si y sólo si

$$(14) \quad \frac{dx^i}{dt} = \rho_0^i + \rho_\alpha^i y^\alpha, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y^\alpha} \right) = \rho_\alpha^i \frac{\partial L}{\partial x^i} - (C_{\alpha 0}^\gamma + C_{\alpha\beta}^\gamma y^\beta) \frac{\partial L}{\partial y^\gamma},$$

para $i \in \{1, \dots, m\}$ y $\alpha \in \{1, \dots, n\}$.

2.3. **Una estructura cosimpléctica sobre $\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A}$.** El Lagrangiano L es *regular* si y sólo si la matriz

$$W_L = (W_{\alpha\beta}) = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \right)$$

es regular o, en otras palabras, si el par (Ω_L, ϕ_0) es una estructura cosimpléctica sobre $\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A}$, es decir,

$$\left\{ \underbrace{\Omega_L \wedge \dots \wedge \Omega_L}_{(n)} \wedge \phi_0 \right\}(a) \neq 0, \text{ para todo } a \in \mathcal{A},$$

$$d^{\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A}}\Omega_L = 0 \quad \text{y} \quad d^{\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A}}\phi_0 = 0.$$

Nótese que la primera condición es equivalente al hecho de que la aplicación $\flat_L : \mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A})^*$ definida por

$$(15) \quad \flat_L(X) = i_X \Omega_L + \phi_0(X) \phi_0,$$

para todo $X \in \mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A}$, sea un isomorfismo de fibrados vectoriales.

Ahora, supongamos que el Lagrangiano L es regular y sea $R_L \in \Gamma(\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}})$ la sección de Reeb de la estructura cosimpléctica (Ω_L, ϕ_0) caracterizada por las siguientes condiciones

$$i_{R_L} \Omega_L = 0 \quad \text{y} \quad i_{R_L} \phi_0 = 1.$$

Entonces, R_L es la única SODE Lagrangiana asociada con L , es decir, las curvas integrales del campo de vectores $\rho_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}}(R_L)$ son las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a L . En este caso, R_L se denomina *la sección de Euler-Lagrange asociada a L* y su expresión local es

$$(16) \quad R_L = \mathcal{X}_0 + y^\alpha \mathcal{X}_\alpha + W^{\alpha\beta} \left(\rho_\beta^i \frac{\partial L}{\partial x^i} - (\rho_0^i + y^\gamma \rho_\gamma^i) \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial y^\beta} \right. \\ \left. - (C_{\beta 0}^\gamma + y^\mu C_{\beta\mu}^\gamma) \frac{\partial L}{\partial y^\gamma} \right) \mathcal{V}_\alpha,$$

donde $(W^{\alpha\beta})$ es la matriz inversa de $(W_{\alpha\beta})$.

3. FORMALISMO HAMILTONIANO

En esta sección, presentaremos una descripción geométrica que nos permitirá obtener las ecuaciones de Hamilton asociadas a una sección Hamiltoniana sobre un afgebroides de Lie (véase [2, 3]).

3.1. **La prolongación $\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}V^*$.** Sea $(\tau_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow Q, \tau_V : V \rightarrow Q, ([\cdot, \cdot]_V, D, \rho_{\mathcal{A}}))$ un afgebroides de Lie sobre una variedad Q . Sabemos entonces que el fibrado bidual $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow Q$ de \mathcal{A} admite una estructura de algebroides de Lie $([\cdot, \cdot]_{\tilde{\mathcal{A}}}, \rho_{\tilde{\mathcal{A}}})$ (véase (1)). Denotemos por $\tau_V^* : V^* \rightarrow Q$ la proyección fibrada de V^* (el fibrado dual de V). Entonces, podemos considerar la prolongación $\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}V^*$ del algebroides de Lie $\tilde{\mathcal{A}}$ mediante $\tau_V^* : V^* \rightarrow Q$. $\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}V^*$ es un algebroides de Lie sobre V^* con estructura $([\cdot, \cdot]_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_V^*}, \rho_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_V^*})$ y proyección $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_V^*} : \mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}V^* \rightarrow V^*$.

Sean (x^i) coordenadas locales en un subconjunto abierto U de Q y $\{e_0, e_\alpha\}$ una base de secciones del fibrado vectorial $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{-1}(U) \rightarrow U$ adaptada a $1_{\mathcal{A}}$ (véase (3)) respecto a la cual las funciones de estructura del algebroides de Lie $\tilde{\mathcal{A}}$ vienen dadas como en (4). Denotaremos por (x^i, y^0, y^α) las

correspondientes coordenadas locales sobre $\tilde{\mathcal{A}}$ y por (x^i, y_0, y_α) las coordenadas duales sobre el fibrado vectorial dual $\tau_{\mathcal{A}^+} : \mathcal{A}^+ \rightarrow Q$ de $\tilde{\mathcal{A}}$. Entonces, (x^i, y_α) son coordenadas locales en V^* y $\{\mathcal{Y}_0, \mathcal{Y}_\alpha, \mathcal{U}_\alpha\}$ es una base local de secciones del fibrado vectorial $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}^+}} : \mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}V^* \rightarrow V^*$, donde

$$(17) \quad \begin{aligned} \mathcal{Y}_0(\psi) &= \left(e_0(\tau_V^*(\psi)), \rho_0^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_\psi \right), & \mathcal{Y}_\alpha(\psi) &= \left(e_\alpha(\tau_V^*(\psi)), \rho_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_\psi \right), \\ \mathcal{U}_\alpha(\psi) &= \left(0, \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \Big|_\psi \right), \end{aligned}$$

para todo $\psi \in (\tau_V^*)^{-1}(U)$. Usando esta base local se pueden introducir, de manera natural, coordenadas locales $(x^i, y_\alpha; z^0, z^\alpha, v_\alpha)$ sobre $\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}V^*$. Un cálculo directo prueba que

$$\begin{aligned} \llbracket \mathcal{Y}_0, \mathcal{Y}_\beta \rrbracket_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}^+}} &= C_{0\beta}^\gamma \mathcal{Y}_\gamma, & \llbracket \mathcal{Y}_\alpha, \mathcal{Y}_\beta \rrbracket_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}^+}} &= C_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{Y}_\gamma, \\ \llbracket \mathcal{Y}_0, \mathcal{U}_\alpha \rrbracket_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}^+}} &= \llbracket \mathcal{Y}_\alpha, \mathcal{U}_\beta \rrbracket_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}^+}} = \llbracket \mathcal{U}_\alpha, \mathcal{U}_\beta \rrbracket_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}^+}} = 0, \\ \rho_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}^+}}(\mathcal{Y}_0) &= \rho_0^i \frac{\partial}{\partial x^i}, & \rho_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}^+}}(\mathcal{Y}_\alpha) &= \rho_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}, & \rho_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}^+}}(\mathcal{U}_\alpha) &= \frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \end{aligned}$$

para todo α y β . Así, si $\{\mathcal{Y}^0, \mathcal{Y}^\alpha, \mathcal{U}^\alpha\}$ es la base dual de $\{\mathcal{Y}_0, \mathcal{Y}_\alpha, \mathcal{U}_\alpha\}$, entonces tenemos que

$$(18) \quad \begin{aligned} d^{\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}V^*} f &= \rho_0^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathcal{Y}^0 + \rho_\alpha^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathcal{Y}^\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \mathcal{U}^\alpha, \\ d^{\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}V^*} \mathcal{Y}^\gamma &= -C_{0\alpha}^\gamma \mathcal{Y}^0 \wedge \mathcal{Y}^\alpha - \frac{1}{2} C_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{Y}^\alpha \wedge \mathcal{Y}^\beta, \\ d^{\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}V^*} \mathcal{Y}^0 &= d^{\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}V^*} \mathcal{U}^\gamma = 0, \end{aligned}$$

para $f \in C^\infty(V^*, \mathbb{R})$.

3.2. Una estructura cosimpléctica sobre $\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}V^*$. Sea $\mu : \mathcal{A}^+ \rightarrow V^*$ la proyección canónica dada por

$$\mu(\varphi) = \varphi^l, \quad \text{para } \varphi \in \mathcal{A}_x^+ \text{ y } x \in Q,$$

donde $\varphi^l \in V_x^*$ es la aplicación lineal asociada a la aplicación afín φ y sea $h : V^* \rightarrow \mathcal{A}^+$ una sección Hamiltoniana de μ , esto es, $\mu \circ h = Id$.

Ahora, consideramos el algebroid de Lie $\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A}^+$ prolongación del algebroid de Lie $\tilde{\mathcal{A}}$ mediante $\tau_{\mathcal{A}^+} : \mathcal{A}^+ \rightarrow Q$ y cuya proyección denotamos por $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}^+}} : \mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A}^+ \rightarrow \mathcal{A}^+$. Entonces, podemos introducir la aplicación $\mathcal{T}h : \mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}V^* \rightarrow \mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A}^+$ definida por

$$\mathcal{T}h(\tilde{a}, X_\psi) = (\tilde{a}, (T_\psi h)(X_\psi)),$$

para $(\tilde{a}, X_\psi) \in \mathcal{T}_\psi^{\tilde{\mathcal{A}}}V^*$, con $\psi \in V^*$, siendo $\mathcal{T}_\psi^{\tilde{\mathcal{A}}}V^*$ la fibra de $\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}V^* \rightarrow V^*$ que contiene al punto ψ . Es fácil probar que el par $(\mathcal{T}h, h)$ es un morfismo de algebroides de Lie entre los algebroides de Lie $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}^+}} : \mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}V^* \rightarrow V^*$ y $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}^+}} : \mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A}^+ \rightarrow \mathcal{A}^+$.

Así, denotaremos por λ_h y Ω_h las secciones de los fibrados vectoriales $(\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}V^*)^* \rightarrow V^*$ y $\Lambda^2(\mathcal{T}^{\tilde{\mathcal{A}}}V^*)^* \rightarrow V^*$ dadas por

$$(19) \quad \lambda_h = (\mathcal{T}h, h)^*(\lambda_{\tilde{\mathcal{A}}}), \quad \Omega_h = (\mathcal{T}h, h)^*(\Omega_{\tilde{\mathcal{A}}}),$$

donde $\lambda_{\tilde{\mathcal{A}}}$ y $\Omega_{\tilde{\mathcal{A}}}$ son, respectivamente, la sección de Liouville y la sección simpléctica canónica asociadas al algebroide de Lie $\tilde{\mathcal{A}}$. Nótese que, como $\Omega_{\tilde{\mathcal{A}}} = -d^{T^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{A}^+}\lambda_{\tilde{\mathcal{A}}}$ y del hecho de que $(\mathcal{T}h, h)$ es un morfismo de algebroides de Lie, tenemos que $\Omega_h = -d^{T^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{V}^*}\lambda_h$. Por otra parte, sea $\eta : T^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{R}$ la sección de $(T^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{V}^*)^* \rightarrow V^*$ definida por

$$(20) \quad \eta(\tilde{a}, X_\psi) = 1_{\mathcal{A}}(\tilde{a}),$$

para $(\tilde{a}, X_\psi) \in T^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{V}^*$, con $\psi \in V^*$. Nótese que si $\text{pr}_1 : T^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{V}^* \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ es la proyección canónica en el primer factor entonces $(\text{pr}_1, \tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^*)$ es un morfismo entre los algebroides de Lie $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^* : T^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{V}^* \rightarrow V^*$ y $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow Q$ y, además, se verifica que

$$(\text{pr}_1, \tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^*)^*(1_{\mathcal{A}}) = \eta.$$

Así, como $1_{\mathcal{A}}$ es un 1-cociclo de $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow Q$, se deduce que η es un 1-cociclo del algebroide de Lie $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^* : T^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{V}^* \rightarrow V^*$.

Supongamos ahora que la sección Hamiltoniana $h : V^* \rightarrow \mathcal{A}^+$ viene dada localmente por

$$h(x^i, y_\alpha) = (x^i, -H(x^j, y_\beta), y_\alpha)$$

y que $\{\mathcal{Y}^0, \mathcal{Y}^\alpha, \mathcal{U}^\alpha\}$ es la base dual de la base local $\{\mathcal{Y}_0, \mathcal{Y}_\alpha, \mathcal{U}_\alpha\}$ definida en (17). Entonces $\eta = \mathcal{Y}^0$ y, usando (19), la expresión local de $\Omega_{\tilde{\mathcal{A}}}$ y la definición de la aplicación $\mathcal{T}h$, se sigue que

$$(21) \quad \begin{aligned} \Omega_h &= \mathcal{Y}^\alpha \wedge \mathcal{U}^\alpha + \frac{1}{2} C_{\alpha\beta}^\gamma y_\gamma \mathcal{Y}^\alpha \wedge \mathcal{Y}^\beta \\ &+ \left(\rho_\alpha^i \frac{\partial H}{\partial x^i} - C_{0\alpha}^\gamma y_\gamma \right) \mathcal{Y}^\alpha \wedge \mathcal{Y}^0 + \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} \mathcal{U}^\alpha \wedge \mathcal{Y}^0. \end{aligned}$$

Así, se prueba fácilmente que el par (Ω_h, η) es una estructura cosimpléctica sobre el algebroide de Lie $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^* : T^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{V}^* \rightarrow V^*$, esto es,

$$\left\{ \underbrace{\Omega_h \wedge \dots \wedge \Omega_h \wedge \eta}_{(n)} \right\}(\psi) \neq 0, \quad \text{para } \psi \in V^*,$$

$$d^{T^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{V}^*}\eta = 0 \quad \text{y} \quad d^{T^{\tilde{\mathcal{A}}}\mathcal{V}^*}\Omega_h = 0.$$

3.3. Ecuaciones de Hamilton. Ahora, sea $R_h \in \Gamma(\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^*)$ la sección de Reeb de la estructura cosimpléctica (Ω_h, η) caracterizada por las siguientes condiciones

$$(22) \quad i_{R_h}\Omega_h = 0 \quad \text{y} \quad i_{R_h}\eta = 1.$$

Con respecto a la base $\{\mathcal{Y}_0, \mathcal{Y}_\alpha, \mathcal{U}_\alpha\}$ de $\Gamma(\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^*)$, la expresión local de R_h es

$$(23) \quad R_h = \mathcal{Y}_0 + \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} \mathcal{Y}_\alpha - \left(C_{\alpha\beta}^\gamma y_\gamma \frac{\partial H}{\partial y_\beta} + \rho_\alpha^i \frac{\partial H}{\partial x^i} - C_{0\alpha}^\gamma y_\gamma \right) \mathcal{U}_\alpha.$$

Así, el campo de vectores $\rho_{\tilde{\mathcal{A}}}^*(R_h)$ viene dado localmente por la expresión

$$(24) \quad \rho_{\tilde{\mathcal{A}}}^*(R_h) = \left(\rho_0^i + \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} \rho_\alpha^i \right) \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(-\rho_\alpha^i \frac{\partial H}{\partial x^i} - y_\gamma (C_{\alpha 0}^\gamma + C_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial H}{\partial y_\beta}) \right) \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$$

y las curvas integrales de R_h (es decir, las curvas integrales del campo de vectores $\rho_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^*}(R_h)$) verifican las siguientes ecuaciones

$$(25) \quad \frac{dx^i}{dt} = \rho_0^i + \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} \rho_\alpha^i, \quad \frac{dy_\alpha}{dt} = -\rho_\alpha^i \frac{\partial H}{\partial x^i} - y_\gamma \left(C_{\alpha 0}^\gamma + C_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial H}{\partial y_\beta} \right),$$

para $i \in \{1, \dots, m\}$ y $\alpha \in \{1, \dots, n\}$. Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones de Hamilton para h* (véase [3]) y la sección R_h se denomina *la sección de Hamilton asociada a h* .

4. TRANSFORMACIÓN DE LEGENDRE Y EQUIVALENCIA ENTRE LOS FORMALISMOS LAGRANGIANO Y HAMILTONIANO

4.1. Transformación de Legendre. Sea $\tau_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow Q$ un algebroides de Lie modelado sobre el algebroides de Lie $\tau_V : V \rightarrow Q$ y con algebroides de Lie bidual $(\tilde{\mathcal{A}}, [\cdot, \cdot]_{\tilde{\mathcal{A}}}, \rho_{\tilde{\mathcal{A}}})$. Consideramos la prolongación $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}}} : \mathcal{T}\tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$ del algebroides de Lie $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow Q$ mediante la proyección $\tau_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow Q$.

Ahora, sea $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ una función Lagrangiana y $\Theta_L \in \Gamma((\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}}})^*)$ la 1-sección de Poincaré-Cartan asociada a L (véase (12)). Introducimos *la transformación de Legendre extendida asociada a L* como la aplicación diferenciable $Leg_L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^+$ definida por

$$Leg_L(a)(b) = \Theta_L(a)(z),$$

para $a, b \in \mathcal{A}_x$, donde z es un punto en la fibra de $\mathcal{T}\tilde{\mathcal{A}}$ que contiene al punto a tal que $\text{pr}_1(z) = i_{\mathcal{A}}(b)$, siendo $\text{pr}_1 : \mathcal{T}\tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ la restricción a $\mathcal{T}\tilde{\mathcal{A}}$ de la proyección canónica en el primer factor $\text{pr}_1 : \tilde{\mathcal{A}} \times T\mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$.

La aplicación Leg_L está bien definida y su expresión local en coordenadas fibradas sobre \mathcal{A} y \mathcal{A}^+ es

$$(26) \quad Leg_L(x^i, y^\alpha) = \left(x^i, L - \frac{\partial L}{\partial y^\alpha} y^\alpha, \frac{\partial L}{\partial y^\alpha} \right).$$

Así, podemos definir *la transformación de Legendre asociada a L* , $leg_L : \mathcal{A} \rightarrow V^*$, por

$$leg_L = \mu \circ Leg_L,$$

siendo $\mu : \mathcal{A}^+ \rightarrow V^*$ la proyección canónica. De (26) y como $\mu(x^i, y_0, y_\alpha) = (x^i, y_\alpha)$, tenemos que

$$(27) \quad leg_L(x^i, y^\alpha) = \left(x^i, \frac{\partial L}{\partial y^\alpha} \right).$$

4.2. Equivalencia entre los formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano. Las aplicaciones Leg_L y leg_L inducen las aplicaciones $\mathcal{T}Leg_L : \mathcal{T}\tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{T}\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{A}^+$ y $\mathcal{T}leg_L : \mathcal{T}\tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{T}\tilde{\mathcal{A}}V^*$ definidas por

$$(28) \quad \begin{aligned} (\mathcal{T}Leg_L)(\tilde{b}, X_a) &= (\tilde{b}, (T_a Leg_L)(X_a)), \\ (\mathcal{T}leg_L)(\tilde{b}, X_a) &= (\tilde{b}, (T_a leg_L)(X_a)), \end{aligned}$$

para $a \in \mathcal{A}$ y $(\tilde{b}, X_a) \in \mathcal{T}\tilde{\mathcal{A}}$.

Ahora, sea $\{e_0, e_\alpha\}$ una base local de secciones de $\Gamma(\tau_{\tilde{\mathcal{A}}})$ adaptada a $1_{\mathcal{A}}$ y $\{\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$ (respectivamente, $\{\mathcal{Y}_0, \mathcal{Y}_\alpha, \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_\alpha\}$) la correspondiente base local de $\Gamma(\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}}})$ (respectivamente, de

$\Gamma(\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}^+}})$) y denotamos por $(x^i, y^\alpha; z^0, z^\alpha, v^\alpha)$ (resp., $(x^i, y_0, y_\alpha; z^0, z^\alpha, v_0, v_\alpha)$) las correspondientes coordenadas locales sobre $\mathcal{T}\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{A}$ (resp., $\mathcal{T}\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{A}^+$). Además, supongamos que $(x^i, y_\alpha; z^0, z^\alpha, v_\alpha)$ son coordenadas locales sobre $\mathcal{T}\tilde{\mathcal{A}}V^*$. Entonces, usando (26), (27) y (28), deducimos que las expresiones locales de las aplicaciones $\mathcal{T}Leg_L$ y $\mathcal{T}leg_L$ son

$$(29) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}Leg_L(x^i, y^\alpha; z^0, z^\alpha, v^\alpha) &= \left(x^i, L - \frac{\partial L}{\partial y^\alpha} y^\alpha, \frac{\partial L}{\partial y^\alpha}; z^0, z^\alpha, \right. \\ & z^0 \rho_0^i \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial y^\alpha} y^\alpha \right) + z^\alpha \rho_\alpha^i \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial y^\beta} y^\beta \right) - v^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} y^\beta, \\ & \left. z^0 \rho_0^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial y^\alpha} + z^\beta \rho_\beta^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial y^\alpha} + v^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \right), \end{aligned}$$

$$(30) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}leg_L(x^i, y^\alpha; z^0, z^\alpha, v^\alpha) &= \left(x^i, \frac{\partial L}{\partial y^\alpha}; z^0, z^\alpha, z^0 \rho_0^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial y^\alpha} \right. \\ & \left. + z^\beta \rho_\beta^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial y^\alpha} + v^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \right). \end{aligned}$$

Así, usando (13), (28) y (29), podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 1. *El par $(\mathcal{T}Leg_L, Leg_L)$ es un morfismo entre los algebroides de Lie $(\mathcal{T}\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{A}, \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}}}, \rho_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{\mathcal{A}}})$ y $(\mathcal{T}\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{A}^+, \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_{\tilde{\mathcal{A}}^+}^{\tau_{\mathcal{A}^+}}, \rho_{\tilde{\mathcal{A}}^+}^{\tau_{\mathcal{A}^+}})$. Además, si Θ_L y Ω_L (respectivamente, $\lambda_{\tilde{\mathcal{A}}}$ y $\Omega_{\tilde{\mathcal{A}}}$) son la 1-sección y la 2-sección de Poincaré-Cartan asociadas a L (respectivamente, la sección de Liouville y la sección simpléctica canónica asociadas a $\tilde{\mathcal{A}}$) entonces*

$$(\mathcal{T}Leg_L, Leg_L)^*(\lambda_{\tilde{\mathcal{A}}}) = \Theta_L, \quad (\mathcal{T}Leg_L, Leg_L)^*(\Omega_{\tilde{\mathcal{A}}}) = \Omega_L.$$

De (27), se sigue que

Proposición 3. *El Lagrangiano L es regular si y sólo si la transformación de Legendre $leg_L : \mathcal{A} \rightarrow V^*$ es un difeomorfismo local.*

En lo que sigue, asumiremos que L es hiperregular, es decir, leg_L es un difeomorfismo global. Entonces, de (28) y el Teorema 1, concluimos que el par $(\mathcal{T}leg_L, leg_L)$ es un isomorfismo de algebroides de Lie. Además, podemos considerar la sección Hamiltoniana $h_L : V^* \rightarrow \mathcal{A}^+$ definida por

$$(31) \quad h_L = Leg_L \circ leg_L^{-1},$$

la correspondiente estructura cosimpléctica (Ω_{h_L}, η) sobre el algebroide de Lie $\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{V^*}} : \mathcal{T}\tilde{\mathcal{A}}V^* \rightarrow V^*$ y la sección Hamiltoniana $R_{h_L} \in \Gamma(\tau_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\tau_{V^*}})$.

Usando (19), (30), (31) y el Teorema 1, deducimos el siguiente resultado.

Teorema 2. *Si el Lagrangiano L es hiperregular entonces la sección de Euler-Lagrange R_L asociada a L y la sección de Hamilton R_{h_L} asociada a h_L están relacionadas de la siguiente forma*

$$(32) \quad R_{h_L} \circ leg_L = \mathcal{T}leg_L \circ R_L.$$

Además, si $\gamma : I \rightarrow \mathcal{A}$ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a L , entonces $leg_L \circ \gamma : I \rightarrow V^*$ es una solución de las ecuaciones de Hamilton asociadas a h_L y,

recíprocamente, si $\bar{\gamma} : I \rightarrow V^*$ es una solución de las ecuaciones de Hamilton para h_L entonces $\gamma = \text{leg}_L^{-1} \circ \bar{\gamma}$ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange para L .

REFERENCES

- [1] J. Grabowski, K. Grabowska, P. Urbanski: Lie brackets on affine bundles, *Ann. Glob. Anal. Geom.*, **24** (2003), 101-130.
- [2] D. Iglesias, J.C. Marrero, E. Padrón and D. Sosa, Lagrangian submanifolds and dynamics on Lie affgebroids, *Rep. Math. Phys.* **38**, 385–436 (2006).
- [3] E. Martínez: Lie algebroids, Some Generalizations and Applications, Proceedings of the XI Fall Workshop on Geometry and Physics (Oviedo, 2002), Publicaciones de la RSME **6**, 103–117.
- [4] E. Martínez, T. Mestdag, W. Sarlet: Lie algebroid structures and Lagrangian systems on affine bundles, *J. Geom. and Phys.*, **44** (2002), 70-95.
- [5] D.J. Saunders: *The geometry of jet bundles*, London Math. Soc., Lecture Note Series, **142** Cambridge Univ. Press, (1989).