Formalismo k-simpléctico y k-cosimpléctico en Teoría Clásica de Campos de Primer Orden.

Silvia Vilariño
e-*mail*: svfernan@usc.es
Departamento de Xeometría e Topoloxía
Facultade de Matemáticas,
Universidade de Santiago de Compostela,
15782-Santiago de Compostela, Spain

1. Abstract

A la hora de dar una descripción geométrica de las teorías clásicas de campos de primer orden, disponemos de varios modelos alternativos: polisimpléctico, k-simpléctico, k-cosimpléctico, multisimpléctico,... En este seminario se van a presentar los modelos conceptualmente más simples : las formulaciones k-simpléctica y k-cosimpléctica de las teorías de campos. En estos entornos geométricos se puede describir el formalismo hamiltoniano y lagrangiano para ciertos tipos de teorías de campos. Además estos modelos son una generalización directa del los formalismos simpléctico y cosimpléctico usados para describir, respectivamente, los sistemas mecánicos autónomos y no autónomos.

Índice

2. Introducción

Los sistemas dinámicos clásicos se caracterizan por los siguientes hechos:

- Involucran un número finito de grados de libertad
- La evolución del sistema está dada por funciones de una variable (el tiempo). Estas funciones son solución de ecuaciones diferenciales ordinarias: las ecuaciones dinámicas,
- el entorno geométrico son variedades simplécticas (presimplécticas), para sistemas autónomos y variedades cosimplécticas (precosimplécticas), para sistemas no autónomos.
- Ejemplos típicos son sistemas mecánicos (clásicos o relativistas) con un número finito de partículas.

Las principales características de las teorías clásicas de campos son:

- Involucran un número infinito de grados de libertad,
- Los diferentes estados de los sistemas están descritos por funciones de varias variables (coordenadas espacio-tiempo), y su comportamiento se describe mediante ecuaciones en derivadas parciales: las ecuaciones de campo.
- Ejemplos típicos son: electromagnetismo clásico, (descrito mediante las ecuaciones de Maxwell), gravitación (ecuaciones de Einstein), mecánica de ondas (ecuación de onda),...

Ejemplo 1 *La transmisión de ondas en un medio material.*

El campo es $\phi(t,x)$ y mide el desplazamiento de cada punto de la membrana, donde t es el tiempo y $x=(x^1,\ldots,x^k)$ denota la posición. La ecuación de campo es la ecuación de onda en una o más dimensiones, que es la EDP hiperbólica

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\phi = 0$$

y es la ecuación de Euler-Lagrange asociada al lagrangiano regular

$$L(\phi,\phi_t,\phi_{x^i}) = \frac{1}{2}(\phi_t^2 - c^2||\nabla\phi||^2)\,.$$

(Cada uno de los infinitos grados de libertad se corresponde con el desplazamiento de un punto).

Existen diversos modelos alternativos para describir geométricamente las teorías clásicas de primer orden: polisimpléctico, multisimpléctico, k-simpléctico, k-cosimpléctico,...). La relación entre algunos de estos formalismos fue estudiada en [10].

Desde un punto de vista conceptual el más simple de todos es el *formalismo k-simpléctico* el cual es la generalización a teorías de campos del formalismo simpléctico estandard que se usa para describir los sistemas dinámicos autónomos. El formalismo k-simpléctico se usa para dar una descripción geométrica de ciertos tipo de teorías de campos, aquellas cuyo lagrangiano y hamiltoniano dependen de los campos y de las derivadas parciales de los campos, o de los correspondientes momentos.

Una extensión natural de este formalismo es el formalismo k-cosimpléctico, donde las variedades k-cosimplécticas se usan para describir geométricamente las teorías de campos que involucran las coordenadas espacio-tiempo en el lagrangiano. Este formalismo es la generalización a teorías de camos del formalismo cosimpléctico que nos permite describir los sistemas mecánicos no-autónomos.

Una de las principales ventajas de estos dos formalismos es que para desarrollarlos sólo se necesita el fibrado tangente y cotangente de una variedad.

En esta charla se pretende dar una introducción a los formalismos k-simpléctico y k-cosimpléctico de las teorías clásicas de primer orden, tanto la formulación lagrangiana como la hamiltoniana.

Todas las variedades que se consideren son reales, paracompactas, conexas y $\mathcal{C}^\infty$. Todas las aplicaciones son $\mathcal{C}^\infty$. Los índices cruzados repetidos indican suma.

3. Formalismo k-simpléctico en teoría clásica de campos de primer orden.

3.1. El enfoque hamiltoniano

3.1.1. Elementos geométricos

El fibrado de k^1-covelocidades de una variedad. Estructuras canónicas

Sea Q una variedad diferenciable de dimensión n y $\tau_Q^* : T^*Q \to Q$ su fibrado cotangente. Se denota por $(T_k^1)^*Q = T^*Q \oplus \overset{k}{\ldots} \oplus T^*Q$ la suma de Whitney de k copias del fibrado cotangente T^*Q. $(T_k^1)^*Q$ se llama *fibrado k-cotangente o fibrado de k^1-covelocidades* de la variedad Q. Se usará la siguiente notación para las proyecciones canónicas:

$$\tau^*\colon (T_k^1)^*Q \to Q \quad , \quad \pi^A\colon (T_k^1)^*Q \to T^*Q \quad ; \quad (1 \leq A \leq k),$$

(π^A es la proyección canónica sobre la A-ésima copia de T^*Q en $(T_k^1)^*Q$. Así, si $(\alpha_{1_q}, \ldots, \alpha_{k_q}) \in (T_k^1)^*Q$, se tiene

$$\tau_Q^*(\alpha_{1_q}, \ldots, \alpha_{k_q}) = q \quad , \quad \pi^A(\alpha_{1_q}, \ldots, \alpha_{k_q}) = \alpha_{A_q} \, .$$

Si (q^i) son coordenadas locales en $U \subseteq Q$, entonces las coordenadas locales inducidas (q^i, p_i^A), $1 \leq i \leq n$, $1 \leq A \leq k$, en $(\tau^*)^{-1}(U) = (T_k^1)^*U$ son

$$q^i(\alpha_{1_q}, \ldots, \alpha_{k_q}) = q^i(q), \qquad p_i^A(\alpha_{1_q}, \ldots, \alpha_{k_q}) = \alpha_{A_q}\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_q\right) .$$

La estructura k-simpléctica canónica en $(T_k^1)^*Q$ se construye como sigue: se definen las formas diferenciales

$$\theta^A = (\pi^A)^*\theta \quad , \quad \omega^A = (\pi^A)^*\omega \quad ,$$

donde θ es la 1-forma de Liouville en T^*Q y $\omega = -d\theta$ es la forma simpléctica canónica en T^*Q. Obviamente, $\omega^A = -d\theta^A$. En coordenadas locales se tiene:

$$\theta^A = p_i^A dq^i \quad , \quad \omega^A = dq^i \wedge dp_i^A \, . \tag{1}$$

La familia $((T_k^1)^*Q, \omega^A, V)$, donde $V = Ker(\tau^*)_*$, es el modelo canónico de la siguiente estructura geométrica.

Definición 2 *Una estructura k-simpléctica en una variedad M de dimensión $n(k+1)$ es una familia $(\omega^A, V; 1 \leq A \leq k)$, donde cada ω^A es un 2-forma cerrada y V es una distribución integrable en M de dimensión nk tales que*

$$(i)\, \omega^A\Big|_{V\times V} = 0, \quad (ii)\, \cap_{A=1}^{k} Ker\omega^A = \{0\}\,.$$

Entonces (M, ω^A, V) se llama variedad k-simpléctica.

Si la condición (ii) no se tiene, entonces tenemos una estructura k-presimpléctica y (M, ω^A, V) es una variedad k-presimpléctica.

Además Awane [1] demuestra que se verifica el siguiente teorema de tipo Darboux:

Teorema 3 *Sea $(\omega^A, V; 1 \leq A \leq k)$ una estructura k-simpléctica en M. Para cada punto de M existe una carta local de coordenadas (q^i, p_i^A), $1 \leq i \leq n$, $1 \leq A \leq k$, tal que*

$$\omega^A = dq^i \wedge dp_i^A \quad , \quad V = \left\langle \frac{\partial}{\partial p_i^A}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_i^k} \right\rangle_{i=1,\dots,n} .$$

Observación 4 Toda variedad 1-simpléctica es simpléctica.

Campos de k-vectores y secciones integrales

Sea M una variedad diferenciable. Se denota por $T_k^1 M$ la suma de Whitney $TM \oplus \overset{k}{\dots} \oplus TM$ de k copias of TM, con proyección $\tau : T_k^1 M \to M$, $\tau(v_{1q}, \dots, v_{kq}) = q$.

Definición 5 *Un* campo de k-vectores *en M es una sección $\mathbf{X}\colon M \longrightarrow T_k^1 M$ de τ.*

Puesto que $T_k^1 M$ es la suma de Whitney $TM \oplus \overset{k}{\dots} \oplus TM$ de k copias of TM, se deduce que un campo de k-vectores $\mathbf{X}$ define una familia de k campos de vectores $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ proyectando $\mathbf{X}$ en cada factor; esto es, $X_A = \tau_A \circ \mathbf{X}$, donde $\tau_A\colon T_k^1 Q \to TQ$ es la proyección canónica en la on the A-copia TQ de $T_k^1 Q$. Por esta razón un campo de k-vectores se denota por $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$.

Definición 6 *Una* sección integral *de un campo de k-vectores $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$, pasando por un punto $q \in M$, es una aplicación $\psi\colon U_0 \subset \mathbb{R}^k \to M$, definida en algún entorno U_0 de $0 \in \mathbb{R}^k$, tal que*

$$\psi(0) = q,\ \psi_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^A}\Big|_t\right) = X_A(\psi(t)) \quad , \quad \text{para cada } t \in U_0,\ 1 \leq A \leq k$$

o equivalentemente,

$$X \circ \psi = \psi^{(1)}$$

donde $\psi^{(1)}$ es la primera prolongación de ψ a $T_k^1 M$ definida por

$$\begin{array}{rccl} \psi^{(1)}: & U_0 \subset \mathbb{R}^k & \longrightarrow & T_k^1 M \\ & t & \longrightarrow & \psi^{(1)}(t) = \left(\psi_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^1}\Big|_t\right), \dots, \psi_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^k}\Big|_t\right)\right) . \end{array}$$

Un campo de k-vectores $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ en M es integrable *si existe una sección integral pasando por cada punto de M.*

En coordenadas locales, si $\psi(t) = (\psi^i(t))$ se tiene

$$\psi^{(1)}(t^1,\dots,t^k) = \left(\psi^i(t^1,\dots,t^k), \frac{\partial\psi^i}{\partial t^A}(t^1,\dots,t^k)\right), \qquad 1 \leq A \leq k\,,\, 1 \leq i \leq n\,. \tag{2}$$

Observación 7 Un campo de k-vectores $\mathbf{X} = (X_1,\dots,X_k)$ es integrable, si y sólo si, $\{X_1,\dots,X_k\}$ define una distribución involutiva en M.

3.1.2. Formalismo hamiltoniano

El objetivo principal de esta sección es obtener una descripción geométrica de las ecuaciones de Hamilton asociadas a un problema variacional múltiple, utilizando la estructura geométrica de las variedades k-simplécticas.

Ecuaciones de Hamilton.

Las ecuaciones de Hamilton de la Mecánica Clásica son un sitema de ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial H}{\partial p_i} & = & \dfrac{dq^i}{dt} \\ \dfrac{\partial H}{\partial q^i} & = & -\dfrac{dp_i}{dt} \end{array}$$

donde (q^i, p_i) es un sistema de coordenadas del espacio de fase dados por las posiciones y los momentos del sistema mecánico.

La geometría simpléctica permite dar una versión intrínseca de estas ecuaciones del modo siguiente: En una variedad simpléctica (M,ω) la 2-forma simpléctica permite definir el isomorfismo $\flat$ por

$$\begin{array}{ccc} TQ & \to & T^*Q \\ X & \mapsto & \flat(X) = \imath_X\omega \end{array}$$

el cual permite asociar a cada función $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ (función hamiltoniana) un campo de vectores X_H llamado campo de vectores hamiltoniano correspondiente a H, tal que las curvas integrales de X_H satisfacen, en coordenadas canónicas, las ecuaciones de Hamilton asociadas a H. En efecto X_H está definido por la ecuación $\imath_{X_H}\omega = dH$

Las ecuacines de Hamilton clásicas asociadas a un problema variacional integral múltiple, son un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden de la forma:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial H}{\partial p_i^A}\Big|_{\psi(t)} & = & \dfrac{\partial\psi^i}{\partial\partial t^A} \\ \dfrac{\partial H}{\partial q^i}\Big|_{\psi(t)} & = & -\displaystyle\sum_{A=1}^{k}\frac{\partial\psi_i^A}{\partial t^A} \end{array} \tag{3}$$

donde $\psi : U \subset \mathbb{R}^k \to (T_k^1)^*Q,\ \psi(t) = (\psi^i(t), \psi_i^A(t))$, es una solución.

El objetivo ahora es encontrar una versión intrínseca de estas ecuciones sobre las variedades k-simplécticas.

Versión geométrica de las ecuaciones de Hamilton

Sea $H\colon (T^1_k)^*Q \to \mathbb{R}$ una función hamiltoniana. La estructura geométrica de la variedad k-simpléctica $(T^1_k)^*Q$ permite definir un morfismo $\Omega^\sharp$ definido por

$$\begin{array}{rccl} \Omega^\sharp : & T^1_k M & \longrightarrow & T^*M \\ & \mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k) & \mapsto & \Omega^\sharp(X_1, \ldots, X_k) = traza(\imath_{X_B}\omega^A) = \displaystyle\sum_{A=1}^{k} \imath_{X_A}\omega_A \,. \end{array}$$

Este morfismo permite asociar a cada H campos de k-vectores $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ sobre $(T^1_k)^*Q$ tales que

$$\Omega^\sharp(X_1, \ldots, X_k) = dH \,.$$

Denotamos por $\mathfrak{X}^k_H((T^1_k)^*Q)$ el conjunto de campos de k-vectores $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ en $(T^1_k)^*Q$ los cuales son solución de la ecuación

$$traza(\imath_{X_B}\omega^A) = dH \,. \tag{4}$$

En un sistema local de coordenadas, cada X_B está localmente dado por

$$X_B = (X_B)^i \frac{\partial}{\partial q^i} + (X_B)^A_i \frac{\partial}{\partial p^A_i} \,,$$

entonces, usando (1), se obtiene que la ecuación (4) es equivalente a las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial H}{\partial p^A_i} & = & (X_A)^i \\ \dfrac{\partial H}{\partial q^i} & = & -\displaystyle\sum_{A=1}^{k} (X_A)^A_i \end{array}\right. \,. \tag{5}$$

La existencia de campos de k-vectores solucion de (4) está asegurada pero no su unicidad, y en un sistema local de coordenadas ellos dependen de $n(k^2 - 1)$ funciones arbitrarias. Sin embargo, los campos de k-vectores obtenidos no son necesariamente integrables, y por tanto, las condiciones de integrabilidad implican que el número de funciones arbitrarias será en general menor que $n(k^2 - 1)$.

Proposición 8 *Si $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^k_H((T^1_k)^*Q)$ es integrable y $\psi\colon \mathbb{R}^k \to (T^1_k)^*Q$ es una sección integral de $\mathbf{X}$, entonces $\psi(t) = (\psi^i(t), \psi^A_i(t))$ es una solución de las ecuaciones de Hamilton (3).*

(*Proof*) Por ser ψ una sección integral de $\mathbf{X}$ se verifica

$$\frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} = (X_A)^i \quad , \quad \frac{\partial \psi^B_i}{\partial t^A} = (X_A)^B_i \,,$$

de modo que las ecuaciones (5) toman ahora la forma

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial H}{\partial p^A_i} & = & \dfrac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \\ \dfrac{\partial H}{\partial q^i} & = & -\displaystyle\sum_{A=1}^{k} \dfrac{\partial \psi^A_i}{\partial t^A} \end{array} \,.$$

3.2. El enfoque lagrangiano

3.2.1. Elementos geométricos

El fibrado de k^1-velocidades de una variedad. Estructuras canónicas

Sea Q una variedad diferenciable de dimensión n. Sea T^1_kQ la suma de Witney de k copias del fibrado tangente TM. T^1_kQ se llama *el fibrado k-tangente* o *fibrado de k^1-velocidades* de Q. Se usará la siguiente notación para las proyecciones canónicas:

$$\tau\colon T^1_kQ \to Q \quad , \quad \tau^A\colon T^1_kQ \to TQ \, ,$$

(τ^A es la proyección en la A-sima copia TQ de T^1_kQ. Así , si $(v_{1q},\dots,v_{kq}) \in T^1_kQ$, se tiene

$$\tau(v_{1q},\dots,v_{kq}) = q \quad , \quad \tau^A(v_{1q},\dots,v_{kq}) = v_{Aq} \, .$$

Si (q^i) son coordenadas locales en $U \subseteq Q$, entonces las coordenadas locales inducidas (q^i, v^i_A), $1 \leq i \leq n$, $1 \leq A \leq k$, en $\tau^{-1}(U) = T^1_kU$ son

$$q^i(v_{1q},\dots,v_{kq}) = q^i(q), \qquad v^i_A(v_{1q},\dots,v_{kq}) = v_{A_q}(q^i) \, .$$

Para un campo de vectores $Z_q \in T_qQ$, y para cada $A = 1,\dots,k$, definimos su *A-levantamiento vertical*, $(Z_q)^{V_A}$, en un punto $(v_{1q},\dots,v_{kq}) \in T^1_kQ$, como el vector tangente a la fibra $\tau^{-1}(q) \subset T^1_kQ$, el cual está dado por

$$(Z_q)^{V_A}(v_{1q},\dots,v_{kq}) = \frac{d}{ds}(v_{1q},\dots,v_{A-1q}, v_{A_q} + sZ_q, v_{A+1q},\dots,v_{kq})|_{s=0} \, .$$

En coordenadas locales, si $X_q = a^i \left.\dfrac{\partial}{\partial q^i}\right|_q$, entonces

$$(Z_q)^{V_A}(v_{1q},\dots,v_{kq}) = a^i \left.\frac{\partial}{\partial v^i_A}\right|_{(v_{1q},\dots,v_{kq})} \, . \tag{6}$$

La *estructura k-tangente canónica* en T^1_kQ es el conjunto $(S^1,\dots,S^k)$ de campos de tensores de tipo $(1,1)$ definidos por

$$S^A(w_q)(Z_{w_q}) = (\tau_*(w_q)(Z_{w_q}))^{V_A}(w_q) \, , \text{ con } w_q \in T^1_kQ,\ Z_{w_q} \in T_{w_q}(T^1_kQ);\ A = 1,\dots,k \, .$$

En coordenadas locales, de (6) se tiene

$$S^A = \frac{\partial}{\partial v^i_A} \otimes \mathrm{d}q^i \, . \tag{7}$$

Observación 9 *Los tensores S^A se pueden obtener como el $(0,\dots,0,\overset{A}{1},0,\dots,0)$-levantamiento del tensor identidad de Q a T^1_kQ definido en [8]. En el caso $k=1$, S^1 es la conocida estructura tangente canónica del fibrado tangente.*

El *campo de vectores de Liouville* $\Delta \in \mathfrak{X}(T^1_kQ)$, es el generador infinitesimal del siguiente flujo

$$\psi\colon \mathbb{R} \times T^1_kQ \longrightarrow T^1_kQ \quad , \quad \psi(s, v_{1_q},\dots,v_{k_q}) = (e^s v_{1_q},\dots,e^s v_{k_q}) \, ,$$

Δ es una suma de campos de vectores $\Delta_1 + \ldots + \Delta_k$, donde cada Δ_A es el generador infinitesimal del siguiente flujo

$$\psi^A\colon \mathbb{R}\times T^1_kQ \longrightarrow T^1_kQ \quad , \quad \psi^A(s, v_{1_q},\dots,v_{k_q}) = (v_{1_q},\dots,v_{A-1_q}, e^s v_{A_q}, v_{A+1_q},\dots,v_{k_q}) \, .$$

En coordenadas locales se tiene

$$\Delta = \sum_{A=1}^{k} \Delta_A = \sum_{A=1}^{k} v^i_A \frac{\partial}{\partial v^i_A} \, . \tag{8}$$

Ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden en T^1_kQ. (SOPDES).

El objetivo de esta subsección es caracterizar los campos de k-vectores integrables en T^1_kQ tales que sus secciones integrales son primeras prolongaciones $\phi^{(1)}$ de aplicaciones $\phi\colon\mathbb{R}^k\to Q$

Recordemos que un campo de k-vectores en T^1_kQ es una sección $\mathbf{\Gamma}\colon T^1_kQ\longrightarrow T^1_k(T^1_kQ)$ de la proyección $\tau_{T^1_kQ}\colon T^1_k(T^1_kQ)\to T^1_kQ$.

Si $\varphi\colon Q\to Q$ es un difeomorfismo, su *prolongación canónica* al fibrado T^1_kQ es la aplicación $T^1_k\varphi : T^1_kQ\to T^1_kQ$ definida por for

$$T^1_k\varphi(v_{1q},\dots,v_{kq})=(\varphi_*(q)v_{1q},\dots,\varphi_*(q)v_{kq})\;;q\in Q\,,(v_{1q},\dots,v_{kq})\in(T^1_k)_qQ\,.$$

Definición 10 *Una* ecuación diferencial parcial de segundo orden (*sopde*)*, es un campo de k-vectores $\mathbf{\Gamma}=(\Gamma_1,\dots,\Gamma_k)$ en T^1_kQ, que es una sección de la proyección $T^1_k\tau\colon T^1_k(T^1_kQ)\to T^1_kQ$ esto es*

$$T^1_k\tau\circ\mathbf{\Gamma}=\mathrm{Id}_{T^1_kQ}\;,$$

En el caso $k=1$, esta es la definición de una ecuación diferencial de segundo orden (SODE).

En coordenadas locales, la expresión de un SOPDE $\mathbf{\Gamma}=(\Gamma_1,\dots,\Gamma_k)$ es

$$\Gamma_A(q^i,v^i_A)=v^i_A\frac{\partial}{\partial q^i}+(\Gamma_A)^i_B\frac{\partial}{\partial v^i_B}\quad,\quad 1\le A\le k\quad,\quad(\Gamma_A)^i_B\in\mathrm{C}^\infty(T^1_kQ)\,.\tag{9}$$

Si $\psi\colon\mathbb{R}^k\to T^1_kQ$ es una sección integral de $\mathbf{\Gamma}$, localmente dada por $\psi(t)=(\psi^i(t),\psi^i_B(t))$, entonces de la definición 6 y (9) se deduce

$$\left.\frac{\partial\psi^i}{\partial t^A}\right|_t=\psi^i_A(t)\quad,\quad\left.\frac{\partial\psi^i_B}{\partial t^A}\right|_t=(\Gamma_A)^i_B(\psi(t))\,.\tag{10}$$

De (2) y (10) se deduce la siguiente proposición:

Proposición 11 *Sea $\mathbf{\Gamma}=(\Gamma_1,\dots,\Gamma_k)$ un* SOPDE *integrable. Si ψ es una sección integral de $\mathbf{\Gamma}$ entonces $\psi=\phi^{(1)}$, donde $\phi^{(1)}$ es la primera prolongación de la aplicación $\phi=\tau\circ\psi\colon\mathbb{R}^k\xrightarrow{\psi}T^1_kQ\xrightarrow{\tau}Q$, y ϕ es una solucióndel sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden*

$$\frac{\partial^2\phi^i}{\partial t^A\partial t^B}(t)=(\Gamma_A)^i_B\left(\phi^i(t),\frac{\partial\phi^i}{\partial t^C}(t)\right)\quad 1\le i\le n\,;1\le A,B\le k.\tag{11}$$

Recíprocamente, si $\phi\colon\mathbb{R}^k\to Q$ es cualquier aplicación que cumple (11), entonces $\phi^{(1)}$ es una sección integral de $\mathbf{\Gamma}=(\Gamma_1,\dots,\Gamma_k)$.

Como consecuencia de (11) se obtiene que si $\mathbf{\Gamma}$ es un SOPDE integrable entonces $(\Gamma_A)^i_B=(\Gamma_B)^i_A$ para todo $A,B=1,\dots,k$.

Haciendo uso de la estructura k-tangente canónica de T^1_kQ se obtiene la siguiente caracterización de un SOPDEs, (ver (7), (8) and (9)):

Proposición 12 *Un campo de k-vectores $\mathbf{\Gamma}=(\Gamma_1,\dots,\Gamma_k)$ en T^1_kQ es un* SOPDE *si y sólo si $S^A(\Gamma_A)=\Delta_A$, para todo $A:1\dots,k$.*

3.2.2. Formalismo lagrangiano

Ecuaciones de Euler-Lagrage.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange de la Mecánica Clásica,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

con $1 \leq i \leq n$, donde (q^i) es un sistema de coordenanas de la variedad diferenciable Q, y

$$L\colon TQ \to \mathbb{R}$$

es una función lagrangiana, son un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Si L es regular, la transformación de Legendre asociada permite definir sobre TQ una estructura simpléctica ω_L por pull-back, a partir de la estructura canónica de T^*Q.

Utilizando esta estructura simpléctica obtenemos una versión intrínseca de las ecuaciones de Euler-Lagrange de la forma siguiente.

Se define el isomorfismo $\flat_L$ por

$$\begin{array}{lcl} T(TQ) & \to & T^*(TQ) \\ X & \mapsto & \flat_L(X) = \imath_X \omega_L \end{array}$$

que permite asociar a la función $EL = CL - L$, con C el campo de vectores de Liouville sobre TQ, un campo de vectores X_L sobre TQ, tal que:

$$\imath_{X_L}\omega_L = dE_L\,,$$

de modo que las proyecciones da Q de las curvas integrales de X_L satisfacen, en coordenadas canónicas, las ecuaciones de Euler-Lagrange.

El objetivo de esta sección es obtener una versión intrínseca de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a un problema variacional integral múltiple,

$$\sum_{A=1}^{k} \frac{\partial}{\partial t^A}\Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial v^i_A}\Big|_{\psi(t)}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}\Big|_{\psi(t)} \quad , \quad v^i_A(\psi(t)) = \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \tag{12}$$

correspondientes a una función lagrangiana

$$L\colon T^1_kQ \to \mathbb{R}$$

y cuyas soluciones son aplicaciones $\psi\colon \mathbb{R}^k \to T^1_kQ$. Observemos que $\psi(t) = \phi^{(1)}(t)$, para algunas $\phi = \tau \circ \psi$. Para poder alcanzar dicho objetivo es necesario introducir los siguientes elementos geométricos.

Formas lagrangianas

Sea $L \in \mathcal{C}^\infty(T^1_kQ)$ una función lagrangiana.

Haciendo uso de la estructura k-tangente canónica de T^1_kQ se introduce una familia de formas $\theta^A_L \in \Omega^1(T^1_kQ)$, $1 \leq A \leq k$, del siguiente modo

$$\theta^A_L = dL \circ S^A\,,$$

y se define $\omega_L^A = -d\theta_L^A$. En coordenadas

$$\theta_L^A = \frac{\partial L}{\partial v_A^i}\, dq^i \quad , \quad \omega_L^A = dq^i \wedge d\left(\frac{\partial L}{\partial v_A^i}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} dq^i \wedge dv_B^j \,.$$

También se puede definir la *función energía lagrangiana* asociada a L, $E_L \in \mathcal{C}^\infty(T_k^1 Q)$ por $E_L = \Delta(L) - L$. Su expresión local es

$$E_L = v_A^i \frac{\partial L}{\partial v_A^i} - L \,.$$

La transformación de Legendre

Se puede definir una aplicación de $T_k^1 Q$ a $(T_K^1)^* Q$ que generaliza la transformación de Legendre usual ente los fibrados tangente y cotangente.

La *transformación de Legendre* $FL\colon T_k^1 Q \to (T_k^1)^* Q$ fue introducida por Günther, [3] y reescrita en [9] como sigue: si $(v_{1_q}, \ldots, v_{k_q}) \in (T_k^1)_q Q$,

$$[FL(v_{1_q}, \ldots, v_{k_q})]^A(u_q) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(v_{1_q}, \ldots, v_{A_q} + s u_q, \ldots, v_{k_q}) \,,$$

para cada $A = 1, \ldots, k$ and $u_q \in T_q Q$. Localmente FL está dada por

$$FL(q^i, v_A^i) = (q^i, \frac{\partial L}{\partial v_A^i}) \,. \tag{13}$$

Además de (1) y (13) se obtiene que

$$\theta_L^A = (FL)^* \theta^A \quad , \quad \omega_L^A = (FL)^* \omega^A \,. \tag{14}$$

De (13) y (14) se obtiene

Proposición 13 *Sea $L \in \mathcal{C}^\infty(T_k^1 Q)$ un lagrangiano. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial v_A^i \partial v_B^j}\right)$ *es una matriz no singular en cada punto de $T_k^1 Q$.*

2. *FL es un difeomorfismo local.*

3. *$(T_k^1 Q, \omega_L^A, V)$, donde $V = Ker\,(\tau_*)$ es una variedad k-simpléctica.*

Definición 14 *Una función lagrangiana L se dice regular si las condiciones anteriores se cumplen.*

Un Lagrangiano L se dice hiperregular si la corrrespondiente transformación de Legendre FL es un difeomorfismo global.

Si L es regular, $(T_k^1 Q, \omega_L^A, E_L)$ se llama sistema lagrangiano k-simpléctico. Si L no es regular $(T_k^1 Q, \omega_L^A, E_L)$ es un sistema lagrangiano k-presimpléctico.

Versión geométrica de las ecuaciones de Euler-Lagrange

Sea L un lagrangiano regular. La correspondiente transformación de Legendre es un difeomorfismo local, entonces se obtiene sobre T^1_kQ una estructura k-simpléctica $(\omega^1_L,\dots,\omega^k_L)$ por pull-back de la estructura canónica de $(T^1_k)^*Q$. Esto nos permite considerar, de modo análogo a como ocurría en el caso hamiltoniano (tomando como $H=E_L$) la siguiente ecuación

$$traza(\imath_{\Gamma_B}\omega^A) = dE_L\,. \tag{15}$$

Denotamos por $\mathfrak{X}^k_L((T^1_k)^*Q)$ el conjunto de campos de k-vectores $\mathbf{\Gamma}=(\Gamma_1,\dots,\Gamma_k)$ en T^1_kQ los cuales son solución de la ecuación (15).

En un sistema local de coordenadas, si cada Γ_A está localmente dado por

$$\Gamma_A = (\Gamma_A)^i\frac{\partial}{\partial q^i} + (\Gamma_A)^i_B\frac{\partial}{\partial v^i_B}\,,$$

entonces, $\mathbf{\Gamma}$ es una solución a (15) si y sólo si, $(\Gamma_A)^i$ y $(\Gamma_A)^i_B$ verifican

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^i\partial v^j_A} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial v^i_A}\right)(\Gamma_A)^j - \frac{\partial^2 L}{\partial v^i_A\partial v^j_B}(\Gamma_A)^j_B &= v^j_A\frac{\partial^2 L}{\partial q^i\partial v^j_A} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\,,\\ \frac{\partial^2 L}{\partial v^j_B\partial v^i_A}(\Gamma_A)^i &= \frac{\partial^2 L}{\partial v^j_B\partial v^i_A}v^i_A\quad .\end{aligned}$$

Si el lagrangiano es regular, las anteriores equaciones son equivalente a las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial v^i_A}v^j_A + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i_A\partial v^j_B}(\Gamma_A)^j_B = \frac{\partial L}{\partial q^i} \tag{16}$$

$$(\Gamma_A)^i = v^i_A \quad , \quad 1\leq i\leq n,\, 1\leq A\leq k\,. \tag{17}$$

Así, si L es un lagrangiano regular, deducimos:

- Si $\mathbf{\Gamma}=(\Gamma_1,\dots,\Gamma_k)$ es una solución a (15) entonces es un SOPDE, (see (17)).
- Las ecuaciones (16) definen soluciones locales a (15) en un entorno de cada punto de T^1_kQ y, usando una partición de la unidad, soluciones globales a (15).
- Puesto que $\mathbf{\Gamma}=(\Gamma_1,\dots,\Gamma_k)\in\mathfrak{X}^k_L(T^1_kQ)$ es un SOPDE, de la Proposición 11 se sabe que, si es integrable, sus secciones integrales son primeras prolongaciones $\phi^{(1)}\colon\mathbb{R}^k\to T^1_kQ$ de aplicaciones $\phi\colon\mathbb{R}^k\to Q$, y de (16) se deduce que ϕ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange(12).
- En el caso $k=1$, la ecuación (15) es $\imath_\Gamma\omega_L = dE_L$, la cual es la ecuación dinámica del formalismo lagrangiano en Mecánica Clásica.

Observación 15 Si el lagrangiano L no es regular entonces, en general, las ecuaciones (12) y (15) no tienen solución en todo punto de T^1_kQ, pero si en una subvariedad S de T^1_kQ (en la situación más favorable). Además las soluciones de (15) no son SOPDES necesariamente, y la condición $S^A(\Gamma_A)=\Delta_A$ debe ser añadida a (15) para recubrir las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Ejemplo 16 *Consideramos las ecuaciones del movimiento asociadas a un sistema mecánico dado por una varilla elástica infinitamente larga que vibra longitudinalmente.*

Si las constantes σ y τ representan respectivamente la masa por unidad de longitud y el módulo de Young del sistema, dado por la constante de proporcionalidad entre el alargamiento de la varilla y la fuerza o tensión ejercida sobre ella, entonces se deduce, que las ecuaciones del movimiento son

$$\sigma \frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^1)^2} - \tau \frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^2)^2} = 0, \tag{18}$$

de modo que las soluciones son aplicaciones

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t^1, t^2) & \longrightarrow & \phi(t^1, t^2) \end{array}$$

que describen el desplazamiento de cada punto de la varilla en función del tiempo y de la posición.

Tratamos de expresar las ecuaciones (18) como un ejemplo de ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a una aplicación lagrangiana L definida sobre $T^1_k Q$ de alguna variedad Q de forma que las soluciones sean las proyecciones a Q de secciones integrales de los SOPDES *solución de (15). Para ello tomamos $k = 2$ y $Q = \mathbb{R}$, con lo que L es un aplicación*

$$L : T^1_2 \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,.$$

Denotando por (q, v_1, v_2) las coordenadas de $T^1_2 \mathbb{R}$, entonces las ecuaciones (18) son las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a

$$L(q, v_1, v_2) = \frac{1}{2}(\sigma v_1^2 - \tau v_2^2),$$

donde q representa la variable ϕ y v_A representa la variable $\partial \phi / \partial t^A$. Entonces se tiene

$$\sum_{A=1}^{2} \frac{\partial}{\partial t^A} \left(\frac{\partial L}{\partial v_A}\Big|_{\phi^{[1]}(t)} \right) = \sigma \frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^1)^2}\Big|_t - \tau \frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^2)^2}\Big|_t \,,$$

así las ecuaciones del movimiento (18) se pueden escribir como

$$\sum_{A=1}^{2} \frac{\partial}{\partial t^A} \left(\frac{\partial L}{\partial v_A}\Big|_{\phi^{[1]}(t)} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}\Big|_{\phi^{[1]}(t)} \,.$$

Se comprueba fácilmente que el lagrangiano L es regular por lo que existe una estructura 2-simpléctica $(\omega^1_L, \omega^2_L, V)$ asociada a L tal que, en coordenadas locales se escribe:

$$\begin{array}{rcl} \omega^1_L & = & \sigma dv_1 \wedge dq \\ \omega^2_L & = & -\tau dv_2 \wedge dq \\ V & = & \langle \frac{\partial}{\partial v_1}, \frac{\partial}{\partial v_2} \rangle\,. \end{array}$$

La aplicación $E_L = \Delta L - L$ se escribe localmente

$$E_L = \frac{1}{2}(\sigma v_1^2 - \tau v_2^2)$$

de modo que

$$dE_L = \sigma v_1 dv_1 - \tau v_2 dv_2 \,.$$

Dado un elemento $\mathbf{X} = (X_1, X_2) \in T^1_2 T^1_2 \mathbb{R}$ *expresado localmente por*

$$X_A = f_A \frac{\partial}{\partial q} + (X_A)_1 \frac{\partial}{\partial v_1} + (X_A)_2 \frac{\partial}{\partial v_2} \,,$$

con $A = 1, 2$*, tenemos que*

$$\imath_{X_1}\omega^1_L + \imath_{X_2}\omega^2_L = -(\sigma(X_1)_1 - \tau(X_2)_2) dq + \sigma f_1 dv_1 - \tau f_2 dv_2 \,.$$

La expresión local de $\imath_{X_1}\omega^1_L + \imath_{X_2}\omega^2_L = dE_L$ *es equivalente a*

$$\sigma(X_1)_1 - \tau(X_2)_2 = 0 \quad , \quad f_1 = v_1 \quad , \quad f_2 = v_2 \,. \tag{19}$$

Sea ahora $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*,* $\phi = \phi(t^1, t^2)$ *una solución básica de* $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$*, esto es,* $\phi^1 = (\phi, \partial\phi/\partial t^1, \partial\phi/\partial t^2)$ *es una sección integral de* $\mathbf{X}$*, entonces*

$$f_A = \frac{\partial \phi}{\partial t^A} \quad , \quad (X_A)_A = \frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^A)^2}$$

y por tanto, sustituyendo en (19) obtenemos

$$\sigma \frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^1)^2} - \tau \frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^2)^2} = 0,$$

que es la ecuación (18).

4. El formalismo k-cosimpléctico en teorías clásicas de campos de primer orden de campos

Los conceptos y resultados de esta sección se encuentran en [5, 6].

4.1. El enfoque hamiltoniano [5].

4.1.1. Fundamentos geométricos.

Sea Q una variedad diferenciable, $\dim Q = n$, y $\tau^*_Q : T^*Q \to Q$ su fibrado cotangente.

Denotemos por $(T^1_k)^*Q = T^*Q \oplus \overset{k}{\dots} \oplus T^*Q$, la suma de Whitney de k copias de T^*Q. La variedad $(T^1_k)^*Q$ se identifica con la variedad $J^1(Q, \mathbb{R}^k)_0$ de 1-jets de aplicaciones de Q en $\mathbb{R}^k$ con meta en $0 \in \mathbb{R}^k$, esto es

$$\begin{array}{ccc} J^1(Q, \mathbb{R}^k)_0 & \equiv & T^*Q \oplus \overset{k}{\dots} \oplus T^*Q \\ j^1_{q,0}\sigma & \equiv & (d\sigma^1(q), \dots, d\sigma^k(q)) \end{array}$$

donde $\sigma^A = \pi^A \circ \sigma : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ es la A-ésima componente de σ, y $\pi^A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ es la proyección canónica en la A-ésima componente de $\mathbb{R}^k$, para todo $1 \leq A \leq k$. $(T^1_k)^*Q$ se llama *el fibrado de las k^1-covelocidades de la variedad Q,* veáse [**?**].

La variedad $J^1\pi_Q$ de 1-jets de secciones del fibrado trivial $\pi_Q : \mathbb{R}^k \times Q \to Q$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^k \times (T^1_k)^*Q$, via el difeomorfismo dado por

$$\begin{array}{ccc} J^1\pi_Q & \to & \mathbb{R}^k \times (T^1_k)^*Q \\ j^1_q\phi = j^1_q(\phi_{\mathbb{R}^k}, Id_Q) & \mapsto & (\phi_{\mathbb{R}^k}(q), \alpha^1_q, \dots, \alpha^k_q) \end{array}$$

donde

$$\phi_{\mathbb{R}^k} : Q \stackrel{\phi}{\to} \mathbb{R}^k \times Q \stackrel{\pi_{\mathbb{R}^k}}{\to} \mathbb{R}^k, \quad \alpha_q^A = d(\phi_{\mathbb{R}^k})^A(q), \text{ y } (\phi_{\mathbb{R}^k})^A : Q \stackrel{\phi_{\mathbb{R}^k}}{\to} \mathbb{R}^k \stackrel{\pi^A}{\to} \mathbb{R}$$

es la A-ésima componente de $\phi_{\mathbb{R}^k}$, $1 \leq A \leq k$.

A lo largo de este resumen se usará la siguiente notación para las proyecciones canónicas

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \arrow[r, "(\pi_Q)_{1,0}"] \arrow[dr, "(\pi_Q)_1"'] & \mathbb{R}^k \times Q \arrow[d, "\pi_Q"] \\
 & Q
\end{tikzcd}$$

y así $(\pi_Q)_1 = \pi_Q \circ (\pi_Q)_{1,0}$, donde

$$\pi_Q(t, q) = q, \quad (\pi_Q)_{1,0}(t, \alpha_q^1, \ldots, \alpha_q^k) = (t, q), \quad (\pi_Q)_1(t, \alpha_q^1, \ldots, \alpha_q^k) = q\,,$$

con $t \in \mathbb{R}^k$, $q \in Q$ y $(\alpha_q^1, \ldots, \alpha_q^k) \in (T_k^1)^*Q$.

Si (q^i) son coordenadas locales en $U \subseteq Q$, entonces las coordenadas locales inducidas (t^A, q^i, p_i^A) en $[(\pi_Q)_1]^{-1}(U) = \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*U$ son

$$t^A(j_q^1\phi) = (\phi_{\mathbb{R}^k}(q))^A, \quad q^i(j_q^1\phi) = q^i(q)\,, \quad p_i^A(j_q^1\phi) = d(\phi_{\mathbb{R}^k})^A(q)(\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_q),$$

o equivalentemente

$$t^A(t, \alpha_q^1, \ldots, \alpha_q^k) = t^A; \quad q^i(t, \alpha_q^1, \ldots, \alpha_q^k) = q^i(q); \quad p_i^A(t, \alpha_q^1, \ldots, \alpha_q^k) = \alpha_q^A\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_q\right)$$

donde $1 \leq i \leq n$, $1 \leq A \leq k$.

En $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$, definimos las formas diferenciales

$$\eta^A = (\pi_1^A)^* dt^A\,, \quad \theta^A = (\pi_2^A)^*\lambda\,, \quad \omega^A = (\pi_2^A)^*\omega\,, \quad 1 \leq A \leq k$$

donde $\pi_1^A : \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \to \mathbb{R}$ y $\pi_2^A : \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \to T^*Q$ son las proyecciones definidas por

$$\pi_1^A(t, (\alpha_q^1, \ldots, \alpha_q^k)) = t^A\,, \quad \pi_2^A(t, (\alpha_q^1, \ldots, \alpha_q^k)) = \alpha_q^A\,, \quad 1 \leq A \leq k,$$

y $\omega = -d\lambda = dq^i \wedge dp_i$ es la forma simpléctica canónica en T^*Q y $\lambda = p_i\, dq^i$ es la 1-forma de Liouville en T^*Q. De modo trivial se tiene $\omega^A = -d\theta^A$.

En coordenadas locales se tiene

$$\eta^A = dt^A\,, \quad \theta^A = \sum_{i=1}^n p_i^A dq^i \quad \omega^A = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i^A\,, \quad 1 \leq A \leq k \tag{20}$$

Además, sea $V = ker\, T(\pi_Q)_{1,0}$. Entonces

$$V = \langle \frac{\partial}{\partial p_i^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial p_i^k} \rangle_{i=1,\ldots,n}$$

Es evidente que las formas η^A y ω^A son cerradas y que se dan las siguientes relaciones

1. $\eta^1 \wedge \ldots \wedge \eta^k \neq 0, \quad (\eta^A)_{\rfloor V} = 0, \quad (\omega^A)_{\rfloor V\times V} = 0,$

2. $(\cap_{A=1}^k \ker \eta^A) \cap (\cap_{A=1}^k \ker \omega^A) = \{0\}, \quad dim(\cap_{A=1}^k \ker \omega^A) = k,$

Basándose en el anterior modelo geométrico, se introduce la siguiente definición, véase [5].

Definición 17 *Sea M una variedad diferenciable de dimensión $k(n+1)+n$. Una familia $(\eta_A, \omega_A, V; 1 \leq A \leq k)$, donde cada η_A es una 1-forma cerrada, cada ω_A es una 2-forma cerrada y V es una distribución integrable en M de dimensión nk, tal que*

1. $\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k \neq 0, \quad \eta_{A_{\rfloor V}} = 0, \quad \omega_{A_{\rfloor V\times V}} = 0,$

2. $(\cap_{A=1}^k \ker \eta_A) \cap (\cap_{A=1}^k \ker \omega_A) = \{0\}, \quad dim(\cap_{A=1}^k \ker \omega_A) = k,$

se denomina estructura k-cosimpléctica, y la variedad M variedad k-cosimpléctica.

El siguiente teorema ha sido demostrado en [5] .

Teorema 18 *(Teorema de Darboux) Si (M, η_A, ω_A, V) es una variedad k-cosimpléctica entonces en un entorno de cada punto M existe un sistema de coordenadas locales $(t^A, q^i, p_i^A; 1 \leq A \leq k, 1 \leq i \leq n)$ tales que*

$$\eta_A = dt^A, \quad \omega_A = dq^i \wedge dp_i^A, \quad V = \langle \frac{\partial}{\partial p_i^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial p_i^k} \rangle_{i=1,\ldots,n}.$$

El modelo canónico de estas estructuras geométricas es $(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q, \eta^A, \omega^A, V)$.

Para cualquier estructura k–cosimpléctica (η_A, ω_A, V) en M, existe una familia de k campos de vectores $\{R_A,\ 1 \leq A \leq k\}$ caracterizados por las condiciones siguientes

$$\imath_{R_A} \eta_B = \delta_{AB}, \qquad \imath_{R_A} \omega_B = 0, \quad 1 \leq A, B \leq k\,.$$

Estos campos se denominan *campos de vectores de Reeb* asociados a la estructura k-cosimpléctica. En el modelo canónico $R_A = \partial/\partial t^A, \quad 1 \leq A \leq k$.

4.1.2. Campos de k-vectores y secciones integrales.

Sea M una variedad arbitraria, $T_k^1 M$ la suma de Whitney $TM \oplus \overset{k}{\ldots} \oplus TM$ de k copias de TM y $\tau : T_k^1 M \longrightarrow M$ su proyección canónica. El fibrado $\tau : T_k^1 M \longrightarrow M$ se llama el fibrado tangente de las k^1-velocidades de M.

Definición 19 *Una sección $\mathbf{X} : M \longrightarrow T_k^1 M$ de la proyección τ se llama* campo de k-vectores *en M.*

Puesto que $T_k^1 M$ es la suma de Whitney $TM \oplus \overset{k}{\ldots} \oplus TM$ de k copias de TM, deducimos que dar un campo de k-vectores $\mathbf{X}$ es equivalente a dar una familia de k campos de vectores $X_1, \ldots, X_k$ en M proyectando $\mathbf{X}$ en cada factor. Por esta razón denotsonmos un campo de k-vectores por $(X_1, \ldots, X_k)$.

Definición 20 *Una sección integral del campo de k-vectores* $(X_1, \ldots, X_k)$ *pasando por un punto $x \in M$ es una aplicación $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \to M$, definida en algún entorno U de $0 \in \mathbb{R}^k$, tal que*

$$\phi(0) = x,\ \phi_*(t)(\frac{\partial}{\partial t^A}\Big|_t) = X_A(\phi(t)) \quad \textit{para todo} \quad t \in U, \quad 1 \leq A \leq k\,. \tag{21}$$

Se dice que un campo de k-vectores $(X_1, \ldots, X_k)$ en M es integrable si existe una sección integral pasando por cada punto de M.

En el formalismo k-cosimpléctico, las soluciones de las ecuaciones de campo se escriben como secciones integrales de ciertos campos de k-vectores. Observemos que, en el caso $k = 1$, esta definición coincide con la definición de curva integral de campo de vectores.

4.1.3. Ecuaciones de Hamilton.

Ejemplo 21 *Sobre el espacio $\mathbb{R}^3$ con coordenadas (t^1, t^2, t^3) consideramos una métrica de Riemann g con componentes $g_{AB}(t)$, $1 \leq A, B \leq 3$.*

Las ecuaciones locales de la electrostática son (véase [4, 2]):

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \psi}{\partial t^A} & = & \dfrac{1}{\sqrt{g}} \displaystyle\sum_{B=1}^{3} g_{AB} \psi^B, \\ \displaystyle\sum_{A=1}^{3} \dfrac{\partial \psi^A}{\partial t^A} & = & -4\pi \sqrt{g}\, r(t), \end{array}$$

donde $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar que da el potencial eléctrico sobre $\mathbb{R}^3$, $P = (\psi^1, \psi^2, \psi^3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, es un campo vectorial que establece el campo eléctrico sobre $\mathbb{R}^3$, $\sqrt{g} = \sqrt{\det g_{AB}}$ y $r = r(t)$ es la función escalar sobre $\mathbb{R}^3$ determinada por:

$$\rho(t) = \sqrt{g}\, r(t) dt^1 \wedge dt^2 \wedge dt^3,$$

siendo $\rho(t)$ la 3-forma en $\mathbb{R}^3$ que determina la densidad de carga, y que es un dato conocido.

Supongamos que la métrica g sobre $\mathbb{R}^3$ es la métrica euclídea, así las ecuaciones anteriores se escriben como sigue

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \psi}{\partial t^A} & = & \psi^A, \\ -(\dfrac{\partial \psi^1}{\partial t^1} + \dfrac{\partial \psi^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial \psi^3}{\partial t^3}) & = & 4\pi r\,. \end{array}$$

Si definimos

$$H(t^1, t^2, t^3, q, p^1, p^2, p^3) = 4\pi r(t) q + \frac{1}{2} \sum_{A=1}^{3} (p^A)^2$$

donde q representa la variable ψ y p^A las variables ψ^A que componen P. Entonces

$$\frac{\partial H}{\partial q} = 4\pi r(t)\,, \ \frac{\partial H}{\partial p^A} = p^A\,.$$

Evaluando en $\psi(t) = (t, \psi(t), \psi^1(t), \psi^2(t), \psi^3(t))$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial q}\Big|_{\psi(t)} &= 4\pi r(t) = -\sum_{A=1}^{3}\frac{\partial \psi^A}{\partial t^A}\Big|_t \\
\frac{\partial H}{\partial p^A}\Big|_{\psi(t)} &= \psi^A(t) = \frac{\partial \psi}{\partial t^A}\,.
\end{aligned}
$$

Así las ecuaciones de la electroestática se pueden escribir como

$$
\frac{\partial H}{\partial q}\Big|_{\psi(t)} = -\sum_{A=1}^{3}\frac{\partial \psi^A}{\partial t^A}\Big|_t\,,\quad \frac{\partial H}{\partial p^A}\Big|_{\psi(t)} = \frac{\partial \psi}{\partial t^A}\,.
$$

En general consideramos las funciones $\psi^i(t^1,\dots,t^k)$ y $\psi_i^A(t^1,\dots,t^k)$ con $i=1,\dots,n$ y $A=1,\dots,k$. En el ejemplo anterior $i=1$ y $k=3$.

Las ecuaciones de Hamilton asociadas a un problema variacional integral múltiple son

$$
\frac{\partial H}{\partial q^i}\Big|_{\psi(t)} = -\sum_{A=1}^{k}\frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A}\,,\quad \frac{\partial H}{\partial p_i^A}\Big|_{\psi(t)} = \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A}\,,\quad 1\le A\le k,\, 1\le i\le n\,, \tag{22}
$$

donde cada solución está dada por

$$
\psi(t^1,\dots,t^k) = (t^1,\dots,t^k,\psi^i(t^1,\dots,t^k),\psi_i^A(t^1,\dots,t^k))
$$

y H es una función de las variables t^A, q^i, p_i^A, así podemos considerar que la función hamiltoniana está definida en $\mathbb{R}^k\times (T_k^1)^*Q$

Versión geométrica de las ecuaciones de Hamilton.

El objetivo principal de esta sección es obtener una versión intrínseca de las ecuaciones de Hamilton asociadas al problema integral múltiple utilizando la estructura geométrica de las variedades k-cosimplécticas, de modo que las soluciones de estas ecuaciones sean secciones integrales de ciertos campos de k-vectores en M.

Sea (M,η_A,ω_A,V) una variedad k-cosimpléctica y sea $H : M\to\mathbb{R}$ una función hamiltoniana. Sea $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)$ un campo de k-vectores que es solución de las siguientes ecuaciones

$$
\begin{aligned}
&\eta_A(X_B)=\delta_{AB},\quad 1\le A,B\le k\\
&\sum_{A=1}^{k}\imath_{X_A}\omega_A = dH-\sum_{A=1}^{k}R_A(H)\eta_A\,.
\end{aligned} \tag{23}
$$

El Teorema de Darboux dice que $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)$ se escribe como sigue

$$
X_A=(X_A)^B\frac{\partial}{\partial t^B}+(X_A)^i\frac{\partial}{\partial q^i}+(X_A)_i^B\frac{\partial}{\partial p_i^B}
$$

entonces, si $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)$ es solución de (23)

$$
(X_A)^B=\delta_A^B,\qquad \frac{\partial H}{\partial p_i^A}=(X_A)^i,\quad \frac{\partial H}{\partial q^i}=-\sum_{A=1}^{k}(X_A)_i^A, \tag{24}
$$

y si $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ es integrable y $\psi : \mathbb{R}^k \to M$ es una sección integral de $\mathbf{X}$, dada por $\psi(t) = (\psi^A(t), \psi^i(t), \psi_i^A(t))$, entonces

$$\frac{\partial \psi^A}{\partial t^B} = \delta_B^A, \quad \frac{\partial \psi^i}{\partial t^B} = (X_B)^i, \quad \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^B} = (X_B)_i^A \,. \tag{25}$$

Por tanto, de (24) y (25) obtenemos que $\psi(t) = (t, \psi^i, \psi_i^A)$ es solución de las ecuaciones de campo Hamiltonianas

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\sum_{A=1}^{k} \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A} \,, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i^A} = \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A},$$

donde $\quad 1 \leq A \leq k, 1 \leq \ i \leq n\,.$

Así, las ecuaciones (23) pueden considerarse como una *versión geométrica* de las ecuaciones de campo hamiltonianas.

Ejemplo 22 *Teniendo en cuenta los hechos anteriores podemos afirmar que las ecuaciones de la electrostática se pueden escribir geométricamente como sigue*

$$\begin{aligned} dt^A(X_B) &= \delta_{AB}, \quad 1 \leq A, B \leq 3 \\ \sum_{A=1}^{3} \imath_{X_A}\omega_A &= dH - \sum_{A=1}^{3} R_A(H)dt^A \,. \end{aligned}$$

Observación 23 Nótese, que en general, las ecuaciones (23) no tienen una solución única. De hecho, si (M, η_A, ω_A, V) es una variedad k-cosimpléctica podemos definir el morfismo de fibrados

$$\begin{array}{rccl} \Omega^\sharp : & T_k^1 M & \longrightarrow & T^*M \\ & (X_1, \dots, X_k) & \mapsto & \Omega^\sharp(X_1, \dots, X_k) = \displaystyle\sum_{A=1}^{k} \imath_{X_A}\omega_A + \eta_A(X_A)\eta_A \,, \end{array} \tag{26}$$

y, denotando por $\mathcal{M}_k(C^\infty(M))$ el espacio de matrices de orden k cuyas componentes son funciones en M, el morfismo de fibrados vectoriales

$$\begin{array}{rccl} \eta^\sharp : & T_k^1 M & \longrightarrow & \mathcal{M}_k(C^\infty(M)) \\ & (X_1, \dots, X_k) & \mapsto & \eta^\sharp(X_1, \dots, X_k) = (\eta_A(X_B))\,, \end{array} \tag{27}$$

entonces las soluciones de (23) están dadas por $(X_1, \dots, X_k) + (\ker \Omega^\sharp \cap \ker \eta^\sharp)$, donde $(X_1, \dots, X_k)$ es una solución particular.

A partir de las condiciones locales (24) podemos definir en un entorno de cada punto $x \in M$ un campo de k-vectores que verifica (23). Por ejemplo, pongamos

$$(X_A)^B = \delta_A^B \,, \quad (X_1)_i^1 = \frac{\partial H}{\partial q^i} \,, \quad (X_A)_i^B = 0 \text{ for } A \neq 1 \neq B \,, \quad (X_A)^i = \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \,.$$

Ahora uno puede construir campo global de k-vectores, que es una solución de (23), usando una partición de la unidad en la variedad M. Veáse [5].

Observación 24 Las ecuaciones (23) en el caso $k = 1$ con $M = \mathbb{R} \times T^*Q$ coinciden con las ecuaciones de la Mecánica Clásica. Por lo tanto este formalismo engloba el formalismo hamiltoniano de la Mecánica.

4.2. El enfoque lagrangiano [6].

4.2.1. Fundamentos geométricos.

La variedad $\mathbb{R}^k \times T^1_k Q$.

Sea $\tau_Q : TQ \to Q$ el fibrado tangente de Q. Denotemos por $T^1_k Q$ la suma de Whitney $TQ \oplus \overset{k}{\dots} \oplus TQ$ de k copias de TQ. A continuación veremos que la variedad $\mathbb{R}^k \times T^1_k Q$ es cosimpléctica cuando $L : \mathbb{R}^k \times T^1_k Q \to \mathbb{R}$ es un lagrangiano regular.

La variedad $J^1\pi_{\mathbb{R}^k}$ de 1-jets de secciones del fibrado trivial $\pi_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times Q \to \mathbb{R}^k$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^k \times T^1_k Q$, via el difeomorfismo dado por

$$\begin{array}{rcl} J^1\pi_{\mathbb{R}^k} & \to & \mathbb{R}^k \times T^1_k Q \\ j^1_t\phi = j^1_t(Id_{\mathbb{R}^k}, \phi_Q) & \to & (t, v_1, \dots, v_k) \end{array} \tag{28}$$

donde $\phi_Q : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^k \times Q \xrightarrow{\pi_Q} Q$ y

$$v_A = (\phi_Q)_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^A}\Big|_t\right) \quad 1 \leq A \leq k\,.$$

Denotemos por $\rho : \mathbb{R}^k \times T^1_k Q \to Q$ la proyección canónica. Si (q^i) son las coordenadas locales en $U \subseteq Q$, entonces las coordenadas locales inducidas (t^A, q^i, v^i_A) en $\rho^{-1}(U) = \mathbb{R}^k \times T^1_k U$ son

$$t^A(j^1_t\phi) = t^A\,, \quad q^i(j^1_t\phi) = q^i(\phi_Q(t))\,, \quad v^i_A(j^1_t\phi) = \frac{\partial(q^i \circ \phi_Q)}{\partial t^A}\Big|_t$$

o equivalentemente

$$t^A(t, v_{1_q}, \dots, v_{k_q}) = t^A; \quad q^i(t, v_{1_q}, \dots, v_{k_q}) = q^i(q); \quad v^i_A(t, v_{1_q}, \dots, v_{k_q}) = v_{A_q}(q^i)\,,$$

donde $1 \leq i \leq n$, $1 \leq A \leq k$.

En esta memoria ussonmos la siguiente notación para las proyecciones canónicas

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^k \times T^1_k Q \arrow[r, "(\pi_{\mathbb{R}^k})_{1,0}"] \arrow[dr, "(\pi_{\mathbb{R}^k})_1"'] & \mathbb{R}^k \times Q \arrow[d, "\pi_{\mathbb{R}^k}"] \\ & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

y así $(\pi_{\mathbb{R}^k})_1 = \pi_{\mathbb{R}^k} \circ (\pi_{\mathbb{R}^k})_{1,0}$, donde

$$\pi_{\mathbb{R}^k}(t, q) = t, \quad (\pi_{\mathbb{R}^k})_{1,0}(t, v_{1_q}, \dots, v_{k_q}) = (t, q), \quad (\pi_{\mathbb{R}^k})_1(t, v_{1_q}, \dots, v_{k_q}) = t,$$

con $t \in \mathbb{R}^k$, $q \in Q$ y $(v_{1_q}, \dots, v_{k_q}) \in T^1_k Q$.

Campos de vectores canónicos en $\mathbb{R}^k \times T^1_kQ$.

Sea C el *campo de vectores canónico (campo de vectores de Liouville)* del fibrado vectorial $(\pi_{\mathbb{R}^k})_{1,0} : \mathbb{R}^k \times T^1_kQ \to \mathbb{R}^k \times Q$. Este campo de vectores C es el generador infinitesimal del siguiente flujo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^k \times T^1_kQ) & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \times T^1_kQ \\ (s, (t, v_{1q}, \dots, v_{kq})) & \longrightarrow & (t, e^s v_{1q}, \dots, e^s v_{kq}) \,, \end{array}$$

y en coordenadas locales se escribe como sigue

$$C = \sum_{i,A} v^i_A \frac{\partial}{\partial v^i_A} \,. \tag{29}$$

C es suma de los campos de vectores

$$C = \sum_{A=1}^k C_A \,,$$

donde cada C_A es el generador infinitesimal del siguiente flujo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^k \times T^1_kQ) & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \times T^1_kQ \\ (s, (t, v_{1q}, \dots, v_{kq})) & \longrightarrow & (t, v_{1q}, \dots, v_{A-1q}, e^s v_{Aq}, v_{A+1q}, \dots, v_{kq}) \,. \end{array}$$

Levantamiento vertical de campos de vectores.

Sea X_q un campo de vectores en Q, para cada $A = 1, \dots, k$ se define su A-levantamiento vertical, $(X_q)^{V_A}$, como el campo de vectores sobre la fibra $\tau^{-1}(q) \subset T^1_kQ$ dado por

$$(X_q)^{V_A}(v_{1q}, \dots, v_{kq}) = \frac{d}{ds}(v_{1q}, \dots, v_{A-1q}, v_{Aq} + sX_q, v_{A+1q}, \dots, v_{kq}))_{|s=0}$$

para todo punto $(v_{1q}, \dots, v_{kq}) \in \tau^{-1}(q) \subset T^1_kQ$.

En coordenadas locales si $X_q = a^i \dfrac{\partial}{\partial q^i}\Big|_q$ entonces

$$(X_q)^{V_A} = a^i \frac{\partial}{\partial v^i_A} \,.$$

Si X es un campo de vectores en Q definimos su A-levantamiento a T^1_kQ, $1 \leq A \leq k$, como el campo de vectores X^{V_A} dado por

$$X^{V_A}(w_q) = (X^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i}_{|q})^{V_A}(w_q) = X^i(q)\frac{\partial}{\partial v^i_A}_{|w_q} = (X^i \circ \tau)(w_q)\frac{\partial}{\partial v^i_A}_{|w_q} \,,$$

entonces

$$X^{V_A} = (X^i \circ \tau)\frac{\partial}{\partial v^i_A} \,, \tag{30}$$

donde $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial q^i}$.

Considersonmos la *extensión natural* de los A-levantamientos de los campos de vectores X^{V_A} en T^1_kQ a $\mathbb{R}^k \times T^1_kQ$, que también denotsonmos por X^{V_A} y que tiene la misma expresión local (30).

Campos de tensores canónicos en $\mathbb{R}^k \times T^1_kQ$.

La estructura k-tangente canónica en T^1_kQ es el conjunto $(S_1,\ldots,S_k)$ de campos de tensores de tipo $(1,1)$ definidos por

$$S_A(w_q)(Z_{w_q}) = (\tau_*(w_q)(Z_{w_q}))^{V_A}(w_q),$$

donde $Z_{w_q} \in T_{w_q}(T^1_kQ)$ y $w_q \in T^1_kQ$.

La expresión local de los campos de tensores S_A está dada por

$$S_A = \frac{\partial}{\partial v^i_A} \otimes dq^i \quad 1 \leq A \leq k\,. \tag{31}$$

Los campos de tensores S_A son conocidos como los $(0,\ldots,0,\overset{A}{1},0,\ldots,0)$-levantamientos del campo de tensores identidad de Q a T^1_kQ han sido definidos por Morimoto en [8].

Considersonmos la *extensión natural* de los campos de tensores S_A en T^1_kQ a $\mathbb{R}^k \times T^1_kQ$, que también denotsonmos por S_A y que tiene la misma expresión local (31).

Las variedades k-tangentes fueron introducidas como una generalización de las variedades tangentes por de León *et al.* [**?**, **?**]. El modelo canónico de estas variedades es T^1_kQ con la estructura $(S_1,\ldots,S_k)$.

Como en el caso de los sitemas mecánicos, estos campos de tensores S_A nos permiten introducir las formas θ^A_L y ω^A_L en $\mathbb{R}^k \times T^1_kQ$ como sigue

$$\theta^A_L = dL \circ S_A \;, \quad \omega^A_L = -d\theta^A_L\,, \quad 1 \leq A \leq k\,,$$

con expresiones locales

$$\theta^A_L = \frac{\partial L}{\partial v^i_A}\, dq^i\,, \quad \omega^A_L = dq^i \wedge d(\frac{\partial L}{\partial v^i_A}), \quad 1 \leq A \leq k\;. \tag{32}$$

Estas formas juegan un papel muy importante en la formulación lagrangiana.

4.2.2. Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden en T^1_kQ.

El propósito de esta subsección es caracterizar los campos de k-vectores integrables en $\mathbb{R}^k \times T^1_kQ$ tales que sus secciones integrales son prolongaciones canónicas de aplicaciones de $\mathbb{R}^k$ en Q.

En general, si $F : M \to N$ es aplicación diferenciable, entonces la aplicación inducida $T^1_k(F) : T^1_kM \to T^1_kN$ definida por $T^1_k(F)(j^1g) = j^1(F\circ g)$ está dada por

$$T^1_k(F)(v_{1q},\ldots,v_{kq}) = (F_*(q)v_{1q},\ldots,F_*(q)v_{kq})\;,$$

donde $v_{1q},\ldots,v_{kq} \in T_qQ$, $q \in Q$, y $F_*(q) : T_qM \to T_{F(q)}N$ es la aplicación inducida.

Definición 25 *Un campo de k-vectores $\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_k)$ en $\mathbb{R}^k \times T^1_kQ$ se dice que es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden* SOPDE *si :*

$$dt^A(X_B) = \delta^A_B\;, \quad \left(\tau_{\mathbb{R}^k} \times id_{T^1_kQ}\right) \circ T^1_k((\pi_{\mathbb{R}^k})_{1,0}) \circ X \;=\; id_{\mathbb{R}^k \times T^1_kQ}$$

donde

$$\begin{array}{rcccccc} \tau_{\mathbb{R}^k} \times id_{T^1_kQ} & : & T^1_k(\mathbb{R}^k \times Q) & \equiv & T^1_k(\mathbb{R}^k) \times T^1_kQ & \to & \mathbb{R}^k \times T^1_kQ \\ & & (t^A, q^i, v^B_A, v^i_A) & \equiv & ((t^A, v^B_A), (q^i, v^i_A)) & \to & (t^A, q^i, v^i_A) \end{array}$$

Sea (q^i) un sistema de coordenadas en Q y (t^A,q^i,v^i_A) las coordenadas inducidas en $\mathbb{R}^k\times T^1_kQ$. De un cálculo directo en coordenadas locales obtenemos que la expresión local de un SOPDE $(X_1,\dots,X_k)$ es

$$X_A(t^B,q^i,v^i_B)=\frac{\partial}{\partial t^A}+v^i_A\frac{\partial}{\partial q^i}+(X_A)^i_B\frac{\partial}{\partial v^i_B},\quad 1\leq A\leq k\,, \tag{33}$$

donde $(X_A)^i_B$ son funciones en $\mathbb{R}^k\times T^1_kQ$. Como una consecuencia directa de las expresiones locales anteriores, deducimos que la familia de campos de vectores $\{X_1,\dots,X_k\}$ son linealmente independientes.

Definición 26 *Sea $\phi:\mathbb{R}^k\to Q$ una aplicación, definimos la* primera prolongación *$\phi^{[1]}$ de ϕ como la aplicación*

$$\begin{array}{rcl}\phi^{[1]}:\mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathbb{R}^k\times T^1_kQ\\ t & \longrightarrow & (t,j^1\phi_t)\equiv\left(t,\phi_*(t)(\frac{\partial}{\partial t^1}),\dots,\phi_*(t)(\frac{\partial}{\partial t^k})\right)\end{array}$$

donde $\phi_t(s)=\phi(t+s)$. En coordenadas locales

$$\phi^{[1]}(t^1,\dots,t^k)=(t^1,\dots,t^k,\phi^i(t^1,\dots,t^k),\frac{\partial\phi^i}{\partial t^A}(t^1,\dots,t^k)), \tag{34}$$

donde $1\leq A\leq k\,,\,1\leq i\leq n\,.$

Observación 27 *Sea $(X_1,\dots,X_k)$ un* SOPDE. *De (33) obtenemos: una aplicación $\psi:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k\times T^1_kQ$, dada por $\psi(t)=(\psi^B(t),\psi^i(t),\psi^i_A(t))$, es una sección integral de $(X_1,\dots,X_k)$ si y sólo si*

$$\frac{\partial\psi^B}{\partial t^A}\Big|_t=\delta^B_A,\quad \frac{\partial\psi^i}{\partial t^A}\Big|_t=\psi^i_A(t),\quad \frac{\partial^2\psi^i}{\partial t^A\partial t^B}\Big|_t=(X_A)^i_B(\psi(t)). \tag{35}$$

Entonces si $(X_1,\dots,X_k)$ es integrable, de (35) deducimos que $(X_A)^i_B=(X_B)^i_A$.

Observemos que la aplicación

$$\begin{array}{rrcl}(id_{\mathbb{R}^k},pr_2\circ\psi): & \mathbb{R}^k & \to & \mathbb{R}^k\times T^1_kQ\\ & t & \to & (t,\psi^i(t),\psi^i_A(t))\end{array}$$

coincide con la primera prolongación $\phi^{[1]}$ de la aplicación $\phi=\rho\circ\psi:\mathbb{R}^k\stackrel{\psi}{\to}\mathbb{R}^k\times T^1_kQ\stackrel{\rho}{\to}Q$, esto es $\phi(t)=(\psi^i(t))$.

Recíprocamente si $\phi:\mathbb{R}^k\to Q$ es cualquier aplicación tal que

$$\frac{\partial^2\phi^i}{\partial t^A\partial t^B}\Big|_t=(X_A)^i_B(\phi^{[1]}(t)),$$

entonces $\phi^{[1]}$ es una sección integral de $(X_1,\dots,X_k)$.

En $\mathbb{R}^k\times T^1_kQ$ se pueden definir los campos de tensores $\hat{S}_A$ de tipo $(1,1)$ definidos por

$$\hat{S}_A=S_A-C_A\otimes dt^A,\quad 1\leq A\leq k\,,$$

para cada $A=1,\dots,k$. Una caracterización de los SOPDE utilizando estos tensores es la siguiente.

Proposición 28 *Un campo de k-vectores $(X_1,\dots,X_k)$ en $\mathbb{R}^k\times T^1_kQ$ es un* SOPDE *si*

$$dt^A(X_B)=\delta^A_B\,,\quad \hat{S}_A(X_B)=0$$

para cualesquiera $1\leq A,B\leq k$.

4.2.3. Formalismo lagrangiano

La aplicación de Legendre y las formas lagrangianas.

Dado un lagrangiano $L : \mathbb{R}^k \times T^1_kQ \to \mathbb{R}$ la aplicación de Legendre

$$FL : \mathbb{R}^k \times T^1_kQ \longrightarrow \mathbb{R}^k \times (T^1_k)^*Q$$

está definida como sigue:

$$FL(t, v_{1q}, \dots, v_{kq}) = (t, \dots, [FL(t, v_{1q}, \dots, v_{kq})]^A, \dots)$$

donde

$$[FL(t, v_{1q}, \dots, v_{kq})]^A(w_q) = \frac{d}{ds} L\left(t, v_{1q}, \dots, v_{Aq} + sw_q, \dots, v_{kq})\right)_{|s=0},$$

para cada $A = 1, \dots, k$; puesto que

$$[FL(t, v_{1q}, \dots, v_{kq})]^A = \frac{\partial L}{\partial v^i_A}\Big|_{(t, , v_{1q}, \dots, v_{kq})} dq^i(q)$$

FL está dado localmente por

$$FL : (t^A, q^i, v^i_A) \longrightarrow (t^A, q^i, \frac{\partial L}{\partial v^i_A}) \,. \qquad (36)$$

De (32) y (36) uno deduce las siguientes identidades

$$\theta^A_L = FL^*\theta^A \,, \quad \omega^A_L = FL^*\omega^A, \quad 1 \leq A \leq k \,. \qquad (37)$$

Definición 29 *Una función lagrangiana $L : \mathbb{R}^k \times T^1_kQ \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es regular (resp. hiperregular) si la correspondiente aplicación de Legendre FL es un difeomorfismo local (resp. global).*

De (36) se obtiene que L es regular si y sólo si $\det(\dfrac{\partial^2 L}{\partial v^i_A \partial v^j_B}) \neq 0$, $1 \leq i, j \leq n$, $1 \leq A, B \leq k$.

La siguiente proposición es importante para la formulación lagrangiana, véase [6].

Proposición 30 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*
1) L es regular.
2) FL es un difeomorfismo local.
3) (dt^A, ω^A_L, V^0) es una estructura k-cosimpléctica en $\mathbb{R}^k \times T^1_kQ$ donde

$$V^0 = ker\, T(\pi_{\mathbb{R}^k})_{1,0} = \langle \frac{\partial}{\partial v^i_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^i_k} \rangle_{i=1,\dots,n}$$

es la distribución vertical del fibrado $(\pi_{\mathbb{R}^k})_{1,0} : \mathbb{R}^k \times T^1_kQ \to \mathbb{R}^k \times Q$.

Ecuaciones de Euler-Lagrange.

Consideremos un campo definido por una función $\psi : \mathbb{R}^k \to Q$, cuya expresión local es $\psi(t^1,\dots,t^k) = (\psi^1(t^1,\dots,t^k),\dots,\psi^n(t^1,\dots,t^k))$. Una función lagrangiana L es una función $\mathbb{R}$-valuada $L(t^A,\psi^i(t),\partial\psi^i/\partial t^A(t))$ que depende de las variables espaciales t^A, de las variables-componentes del campo $q^i = \psi^i$ y de las primeras derivadas parciales del campo $\partial\psi^i/\partial t^A(t)$. Por lo tanto podríamos considerar que L está definida en $\mathbb{R}^k \times T^1_kQ$ y así $L : \mathbb{R}^k \times T^1_kQ \to \mathbb{R}$.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para una función lagrangiana L con solución $(\psi^i(t^1,\dots,t^k))$ son el sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden dado por

$$\sum_{A=1}^k \left(\frac{\partial^2 L}{\partial t^A \partial v^i_A}\Big|_{\psi^{[1]}(t)} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i_A}\Big|_{\psi^{[1]}(t)} \frac{\partial \psi^j}{\partial t^A}\Big|_t + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j_B \partial v^i_A}\Big|_{\psi^{[1]}(t)} \frac{\partial^2 \psi^j}{\partial t^A \partial t^B}\Big|_t \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}\Big|_{\psi^{[1]}(t)},$$

donde $1 \le i \le n$ y $\psi^{[1]}(t) = (t,\psi^i(t),\dfrac{\partial\psi^i}{\partial t^A}\Big|_t)$, que suelen escribirse como sigue

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A}\Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial v^i_A}\Big|_{\psi^{[1]}(t)} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}\Big|_{\psi^{[1]}(t)}, \quad v^i_A(\psi(t)) = \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A}\Big|_t, \tag{38}$$

donde cada solución $\psi^{[1]} : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k \times T^1_kQ$ está dada por $\psi^{[1]}(t) = (t,\psi^i(t),\dfrac{\partial\psi^i}{\partial t^A}\Big|_t)$.

Versión geométrica de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

A continuación se dará una descripción geométrica de las ecuaciones de Euler-Lagrange de modo que las soluciones de estas ecuaciones (38) son secciones integrales de ciertos campos de vectores en $\mathbb{R}^k \times T^1_kQ$.

Consideramos las ecuaciones

$$\begin{aligned} dt^A((X_L)_B) &= \delta^A_B, \quad 1 \le A, B \le k\,, \\ \sum_{A=1}^k i_{(X_L)_A}\omega^A_L &= dE_L + \sum_{A=1}^k \frac{\partial L}{\partial t^A} dt^A \end{aligned} \tag{39}$$

donde $E_L = C(L) - L$. Si escribimos la expresión local de $(X_L)_A$ como sigue

$$(X_L)_A = ((X_L)_A)^B \frac{\partial}{\partial t^B} + ((X_L)_A)^i \frac{\partial}{\partial q^i} + ((X_L)_A)^i_B \frac{\partial}{\partial v^i_B}, \quad 1 \le A \le k$$

obtenemos que (39) es equivalente a las ecuaciones

$$((X_L)_A)^B = \delta^B_A\,, \qquad ((X_L)_B)^i \frac{\partial^2 L}{\partial t^A \partial v^i_B} = v^i_B \frac{\partial^2 L}{\partial t^A \partial v^i_B}$$

$$((X_L)_C)^j \frac{\partial^2 L}{\partial v^i_B \partial v^j_C} = v^j_C \frac{\partial^2 L}{\partial v^i_B \partial v^j_C} \tag{40}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i_B}\Big(v^j_B - ((X_L)_B)^j\Big) + \frac{\partial^2 L}{\partial t^B \partial v^i_B} + v^k_B \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v^i_B} + ((X_L)_B)^k_C \frac{\partial^2 L}{\partial v^k_C \partial v^i_B} = \frac{\partial L}{\partial q^i}\,. \tag{41}$$

Cuando L es regular obtenemos que estas ecuaciones son

$$((X_L)_A)^B = \delta^B_A, \quad ((X_L)_A)^i = v^i_A, \quad \sum_{A=1}^{k} (X_L)_A(\frac{\partial L}{\partial v^i_B}) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \tag{42}$$

Por lo tanto cuando L es regular $(X_L)_A$ está dado localmente por

$$(X_L)_A = \frac{\partial}{\partial t^A} + v^i_A \frac{\partial}{\partial q^i} + ((X_L)_A)^i_B \frac{\partial}{\partial v^i_B}$$

y así $((X_L)_1, \ldots, (X_L)_k)$ es un SOPDE.

Teorema 31 *Sea L un lagrangiano y $\mathbf{X}_L = ((X_L)_1, \ldots, (X_L)_k)$ un campo de k-vectores tal que*

$$dt^A((X_L)_B) = \delta^A_B, \;, \quad \sum_{A=1}^{k} i_{(X_L)_A}\omega^A_L = dE_L + \sum_{A=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial t^A} dt^A \tag{43}$$

donde $E_L = C(L) - L$ y $1 \leq A, B \leq k$. Entonces

1. *Si L es regular entonces $\mathbf{X}_L = ((X_L)_1, \ldots, (X_L)_k)$ es un* SOPDE. *Si $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k \times T^1_k Q$ es una sección integral de $\mathbf{X}_L$, entonces $\phi : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^k \times T^1_k Q \xrightarrow{\rho} Q$ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (38).*

2. *Si $((X_L)_1, \ldots, (X_L)_k)$ es integrable y $\phi^{[1]} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k \times T^1_k Q$ es una sección integral, entonces $\phi : \mathbb{R}^k \to Q$ es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (38).*

Demostración.

1 es una consecuencia inmediata de (40) y de la tercera ecuación en (42). Si $\phi^{[1]}$ es una sección integral entonces de la ecuación (41) y la expresión local de $\phi^{[1]}$ deducimos que ϕ solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (38).

De los resultados de esta sección se sigue que la versión geométrica de las ecuaciones de una cuerda vibrante se puede describir como sigue:

$$dt^A((X_L)_B) = \delta^A_B, \quad 1 \leq A, B \leq 2, \quad \sum_{A=1}^{2} i_{(X_L)_A}\omega^A_L = dE_L + \sum_{A=1}^{2} \frac{\partial L}{\partial t^A} dt^A\,.$$

Observación 32 *Si $L : \mathbb{R}^k \times T^1_k Q \longrightarrow \mathbb{R}$ es regular, entonces (dt^A, ω^A_L, V^0) es una estructura k-cosimpléctica en $\mathbb{R}^k \times T^1_k Q$. Los campos de Reeb $(R_L)_A$ correspondientes a esta estructura están caracterizados por*

$$i_{(R_L)_A}\, dt^B = \delta^B_A\;, \quad i_{(R_L)_A}\, \omega^B_L = 0\,,$$

y verifican que $(R_L)_A(E_L) = -\partial L/\partial t^A$. Por consiguiente si escribimos las ecuaciones de Hamilton (23) para la variedad k-cosimpléctica $(M = \mathbb{R}^k \times T^1_k Q, dt^A, \omega^A_L, V^0)$ obtenemos

$$dt^A(X_B) = \delta^A_B, \quad \sum_{A=1}^{k} \imath_{X_A}\omega_A = dE_L - \sum_{A=1}^{k} (R_L)_A(E_L) dt^A\,.$$

es decir las ecuaciones (39).

Si el lagrangiano L es hiperregular, esto es, FL es un difeomorfismo, entonces podemos definir una función hamiltoniana $H : \mathbb{R}^k \times (T^1_k)^*Q \to \mathbb{R}$ por $H = E_L \circ FL^{-1}$ donde FL^{-1} es la inversa de FL. En estas condiciones podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 33

1. *Si* $\mathbf{X}_L = ((X_L)_1, \ldots, (X_L)_k)$ *es una solución de (39), entonces* $\mathbf{X}_H = ((X_H)_1, \ldots, (X_H)_k)$*, donde* $(X_H)_A = FL_*((X_L)_A)$*,* $1 \leq A \leq k$*, es una solución de las ecuaciones (23) en* $\mathbb{R}^k \times (T^1_k)^*Q$*, con* $\eta^A = \eta^A$*,* $\omega^A = \omega^A$*, y* $H = E_L \circ FL^{-1}$*.*

2. *Si* $\mathbf{X}_L = ((X_L)_1, \ldots, (X_L)_k)$ *es integrable y* $\phi^{[1]}$ *es una sección integral, entonces* $\varphi = FL \circ \phi^{[1]}$ *es una sección integral de* $\mathbf{X}_H = ((X_H)_1, \ldots, (X_H)_k)$ *y por lo tanto es una solución de las ecuaciones de Hamilton (22) con* $H = E_L \circ FL^{-1}$*.*

Demostración.

1. Es una consecuencia inmediata de (23) y (39) usando que $FL^*\eta^A = dt^A$, $FL^*\omega^A = \omega^A_L$, y $E_L = H \circ FL^{-1}$.

2. Es una consecuencia inmediata de la Definición 20 de sección de un campo de k-vectores.

Observación 34 *Si reescribimos la ecuaciones (39) para el caso* $k = 1$*, obtenemos*

$$dt(X_L) = 1 \,, \quad i_{X_L}\omega_L = dE_L + \frac{\partial L}{\partial t} dt \,, \tag{44}$$

las cuales son equivalentes a las ecuaciones dinámicas

$$dt(X_L) = 1 \,, \quad i_{X_L}\Omega_L = 0 \,,$$

donde $\Omega_L = \omega_L + dE_L \wedge dt$ *es la 2-forma de Poincaré-Cartan asociada al lagrangiano L. Recordemos que esto describe la mecánica no autónoma.*

Referencias

[1] A. Awane, "k-symplectic structures", *J. Math. Phys.* **33**, 4046-4052 (1992).

[2] E. Durand : *Électrostatique, les distributions*, Mason et Cie Editeurs, Paris 1964.

[3] C. Günther, "The polysymplectic Hamiltonian formalism in field theory and calculus of variations I: The local case", *J. Diff. Geom.* **25**, 23-53 (1987).

[4] Kijowski, Jerzy; Tulczyjew, Włodzimierz M : *A symplectic framework for field theories. Lecture Notes in Physics* , , 107. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[5] M. de León; E. Merino, J. A. Oubiña, P. Rodrigues, Modesto Salgado. " Hamiltonian systems on k-cosymplectic manifolds". *J. Math. Phys.* **39** (1998), no. 2, 876–893.

[6] M. de León; E. Merino, M. Salgado. "k-cosymplectic manifolds and Lagrangian field theories". *J. Math. Phys.* **42** (2001), no. 5, 2092–2104.

[7] M. de León, M. Mclean, L. K. Norris, A. M. Rey , M. Salgado. "Geometric Structures in Field Theory". Preprint. math-ph/0208036

[8] A. Morimoto "Liftings of some types of tensor fields and connections to tangent p^r-velocities". *Nagoya Qath. J.* **40** (1970) 13-31.

[9] F. Munteanu, A. M. Rey, M. Salgado, "The Günther's formalism in classical field theory: momentum map and reduction", *J. Math. Phys.* bf 45(5) (2004) 1730–1751.

[10] N. Román-Roy, A. M. Rey, M. Salgado, S. Vilariño: " On the k-Symplectic, k-Cosymplectic and Multisymplectic Formalisms of Classical Field Theories", arXiv:0705.4364v1 [math-ph], (2007)